DER HELIUM-FLASH BEI EINEM STERN VON 1.3 SONNENMASSEN

VON

HANS-CHRISTOPH THOMAS

MÜNCHEN, JULI 1967

Der Helium-Flash

bei einem Stern von 1.3 Sonnenmassen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Hans-Christoph Thomas
aus Dresden

am
13. März 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Professor R. Kippenhahn

2. Berichterstatter: Professor P. Wellmann

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Juli 1967

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verzeichnis der Symbole	4
1. Einleitung und Zusammenfassung	6
2. Rechenprogramm	9
2.1 Die zeitabhängigen Gleichungen	9
2.2 Zustandsgleichung, Opazität, nukleare Energieerzeugung	11
2.3 Änderung der chemischen Zusammensetzung	15
3. Entwicklung vor dem Flash	18
3.1 Anfangsmodell	18
3.2 Zentrales Wasserstoffbrennen	20
3.3 Wasserstoffbrennen in einer Schale	21
3.4 Neutrinos	23
4. Helium-Flash	25
4.1 Anlaufphase	25
4.2 Expansionsphase	31
4.3 Abkühlphase	34
4.4 Stabilität der Kohlenstoffschicht	37
4.5 Einsetzen der Pulse	39
5. Ergänzungen	43
5.1 Wiederholungsrechnungen	43
5.2 Vernachlässigungen	44
Anhang A	48
Anhang B	51
Literaturverzeichnis	54
Tabellen	56
Abbildungen	64

Verzeichnis der Symbole

a	Strahlungsdichtekonstante
c	Lichtgeschwindigkeit
c_V	spezifische Wärme pro Masseneinheit bei konstantem Volumen
c_P	spezifische Wärme pro Masseneinheit bei konstantem Druck
G	Gravitationskonstante
L	Leuchtkraft des Sterns
$L_\odot$	Sonnenleuchtkraft
L_r	durch eine Kugel vom Radius r pro Zeiteinheit transportierte Energie
M	Masse des Sterns
$M_\odot$	Sonnenmasse
M_r	Masse in einer Kugel vom Radius r
m_p	Masse des Protons
P	Druck
r	Zentrumsabstand
$\mathfrak{R}$	Gaskonstante pro Mol
S	Leuchtkraftvariable
T	Temperatur
T_e	Effektivtemperatur
t	Zeit
X	Gewichtsanteil von Wasserstoff
X_C	Gewichtsanteil von Kohlenstoff
Y	Gewichtsanteil von Helium
Z	Gewichtsanteil der Elemente schwerer als Helium

α = $(d \log \varrho / d \log P)_T$

β Verhältnis von Gasdruck zu Gesamtdruck

δ = $- (d \log \varrho / d \log T)_P$

ε nukleare Energieerzeugung pro Massen- und Zeiteinheit

ε_g bei thermodynamischen Zustandsänderungen freigesetzte Energie pro Massen- und Zeiteinheit

ε_H durch das Wasserstoffbrennen erzeugte Energie pro Massen- und Zeiteinheit

ε_{He} durch alle Prozesse des Heliumbrennens erzeugte Gesamtenergie pro Massen- und Zeiteinheit

ε_ν Energie der Neutrinos pro Massen- und Zeiteinheit

$\bar{\varkappa}$ Rosselandmittel des Absorptionskoeffizienten

μ Molekulargewicht

ϱ Dichte

ψ Entartungsparameter

∇ = d log T/d log P

∇_{ad} = ∇ bei adiabatischer Schichtung

∇_{rad} = ∇ bei reinem Strahlungstransport

1. Einleitung und Zusammenfassung

Die wichtigste Energiequelle für die von einem Stern ausgehende Strahlung sind die bei hohen Temperaturen ablaufenden Fusionsprozesse der leichten Elemente. Die dabei freiwerdende Energie ist meist sehr stark von der Temperatur abhängig. Überschreitet die Temperatur im Innern eines Sterns nur sehr wenig die für ein bestimmtes nukleares Brennen nötige Mindesttemperatur, so werden plötzlich große Energiemengen freigesetzt. Zu deren Abtransport ist ein erhöhter Temperaturgradient nötig, dessen Einstellung innerhalb der Kelvin-Helmholtz-Zeitskala dieses Gebietes erfolgt. Bis die Temperaturumschichtung beendet ist, muß die freigesetzte Energie durch Expansion und Temperaturerhöhung des Brenngebietes verbraucht werden. Dabei ergibt sich ein wesentlicher Unterschied, je nachdem ob die Materie bei Zünden des nuklearen Brennens als ideales Gas vorliegt oder für die Elektronen die Zustandsgleichung für Fermi-Dirac-Entartung gilt. In letzterem Fall wird eine Expansion des Brenngebietes zunächst verhindert und alle produzierte Energie durch Temperaturerhöhung verbraucht. Damit steigt aber die Energieproduktion an, ein schnellerer Anstieg der Temperatur ist die notwendige Folge. Der Vorgang muß sich immer mehr beschleunigen, bis die Temperatur hoch genug geworden ist, um die Entartung aufzuheben. Dieses Phänomen bezeichnet man als Flash. Es wurde von MESTEL (1952) vorausgesagt und von SCHWARZSCHILD und HÄRM (1962) beim Einsetzen des Heliumbrennens in einem Stern von 1.3 Sonnenmassen gefunden. Weitere Rechnungen zum

Helium-Flash wurden durchgeführt von SUGIMOTO (1964) und von HÄRM und SCHWARZSCHILD (1964,1966).

Betrachtet man das Hertzsprung-Russell-Diagramm der Sterne der Population II, so besetzt ein Teil der Sterne stets den sogenannten horizontalen Ast. Die Entwicklungsrechnungen vor dem Helium-Flash führen aber nur zu Modellen auf der Hauptreihe und dem Riesenast. Will man Sternmodelle für den horizontalen Ast konstruieren, so muß zunächst untersucht werden, wie der Verlauf des Helium-Flash die weitere Entwicklung beeinflußt. Das soll in der vorliegenden Arbeit für ein Sternmodell der Population II mit einer Masse von 1.3 Sonnenmassen untersucht werden. Dabei wird vor allem die Phase des Helium-Flash mit einem Programm durchgerechnet, das mehrere Verbesserungen gegenüber den bisherigen Rechnungen zum Helium-Flash enthält. Die zwei wichtigsten, die den Verlauf des Helium-Flash beeinflussen, sind:

a) die Energieverluste durch die Produktion von Neutrinos auf Grund der Theorie der schwachen Wechselwirkung
b) die endliche thermische Leitfähigkeit der Elektronen in einem teilweise entarteten Gebiet.

Die Rechnungen beginnen mit dem homogenen Hauptreihenmodell, das heißt mit dem zentralen Wasserstoffbrennen. Es folgt eine Phase, in der die abgestrahlte Energie des Sterns von einer wasserstoffbrennenden Schale gedeckt wird, die einen Heliumkern ständig wachsender Masse umgibt. Während dieser Phase setzt die Produktion von Neutrinos ein. Diese spielen

zwar in der Gesamtenergiebilanz des Sterns keine Rolle, wohl aber im Zentralgebiet, das sie kühlen. Daher wird das Helium nicht im Zentrum, sondern in einer Kugelschale um das Zentrum gezündet. Daran schließt sich der Helium-Flash an, der numerisch die größten Schwierigkeiten bietet, während er in der Lebenszeit des Sterns nur ein sehr kurzes Zeitintervall umfaßt. Das Abklingen des Helium-Flash ist mit der Frage verknüpft, ob eine Durchmischung des gesamten Sterns eintritt. Hiervon hängt die ganze weitere Entwicklung des Sterns ab. Die Rechnungen liefern das gleiche Ergebnis wie alle bisherigen Rechnungen von Härm und Schwarzschild und von Sugimoto, nämlich keine Durchmischung. Dagegen ergab sich in dieser Phase ein anderes, unerwartetes Resultat. Die äußere Konvektionszone transportierte Produkte von Kernreaktionen an die Oberfläche, was die atmosphärischen Elementhäufigkeiten änderte. Der Stern gehört von da an zu den Kohlenstoffsternen. Für die weitere Entwicklung muß die Frage geklärt werden, ob eine Schichtung im Stern stabil ist, bei der das Molekulargewicht zum Zentrum hin abnimmt. Es wurde vorläufig angenommen, daß eine solche Schichtung instabil ist und zum Durchmischen des betreffenden Gebietes führt. Im Verlauf des Heliumbrennens treten Instabilitäten auf, die zu schwachen thermischen Pulsen führen. Insgesamt wurden vier solcher Pulse durchgerechnet, um Aussagen über die mögliche Weiterentwicklung nach dem Flash zu bekommen. Der horizontale Ast im Hertzsprung-Russell-Diagramm der Population II wird von diesen Modellen nicht erreicht.

2. Rechenprogramm

2.1 Die zeitabhängigen Gleichungen

Der Aufbau eines Sterns wird beschrieben durch die vier Grundgleichungen, den Energiesatz

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g \tag{1}$$

mit

$$\varepsilon_g = - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{2}$$

den Impulssatz unter Vernachlässigung des Trägheitsgliedes

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = - \frac{G M_r}{4\pi r^4}, \tag{3}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{4}$$

und die Gleichung für den Energietransport durch Strahlung

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = - \frac{3 \bar{\varkappa} L_r}{64\pi^2 a c r^4 T^3} \tag{5}$$

oder durch Konvektion

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = - \nabla_{ad} \frac{G M_r T}{4\pi r^4 P}. \tag{6}$$

Für die zeitliche Änderung der chemischen Zusammensetzung gilt im Fall der Umwandlung von Wasserstoff zu Helium

$$\frac{\partial X}{\partial t} = - \frac{\varepsilon_H}{E_H} \quad , \tag{7}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\varepsilon_H}{E_H} \tag{8}$$

(E_H: bei der Reaktion $4H \rightarrow He$ freigesetzte Energie pro Gramm verbrauchtem Wasserstoff). Für die weiteren Fusionsprozesse gelten ähnliche Gleichungen (siehe auch "2.3 Änderung der chemischen Zusammensetzung"). Unabhängige Variable sind also die Zeit t und die Masse M_r, die in einer Kugel vom Radius r enthalten ist. Die Lösung hängt von Anfangsbedingungen ab, die zur Zeit $t = 0$ die zeitlichen Änderungen von Druck und Temperatur und die chemische Zusammensetzung des Sterns beschreiben, sowie von je zwei Randbedingungen am äußeren Rand ($M_r = M$) und im Zentrum ($M_r = 0$).

Die Lösung erfolgt mit der von Henyey und seinen Mitarbeitern entwickelten Methode. Eine Beschreibung des hier benutzten Programms wurde in Sternentwicklung I (HOFMEISTER, KIPPENHAHN, WEIGERT [1964], im folgenden zitiert als HKW I) gegeben. Verbesserungen hierzu finden sich in den weiteren Arbeiten dieser Reihe. Für die Leuchtkraftvariable wurde eine andere Form gewählt und zwar zunächst die in KIPPENHAHN, THOMAS, WEIGERT (1966) (im folgenden zitiert als KTW V) beschriebene Variable

$$S = \ln \left(1 + \frac{L_r}{L_o} \right) \tag{9}$$

Bei den großen nach innen fließenden Energiemengen, wie sie während der Rechnung auftraten, mußte jedoch L_o sehr viel größer als die Außenleuchtkraft des Sterns gesetzt werden. Kommt man der Singularität bei $L_r/L_o = -1$ zu nahe, so konvergiert das benutzte Iterationsverfahren nicht mehr, da kleine Änderungen in L_r dann mit großen Änderungen in S verknüpft sind. Deshalb wurde ab Modell 984 mit einer Verallgemeinerung der obigen Variablen gerechnet:

$$S = \operatorname{arc\,sinh} \frac{L_r}{L_o} \qquad (10)$$

die auf sehr stark negative L_r-Werte anwendbar ist, auch wenn die Konstante L_o jetzt stets der Außenleuchtkraft des Sterns gleichgesetzt wird. Für die Konvergenz der Henyey-Methode war es jedoch vorteilhafter, beim Auftreten hoher Leuchtkraftgradienten im Stern einen größeren Wert für L_o zu wählen (maximal $L_o = 100$ L).

2.2 Zustandsgleichung, Opazität, nukleare Energieerzeugung

Für die Berechnung der Dichte aus Druck und Temperatur sind die folgenden Punkte berücksichtigt:

a) teilweise Ionisation von Wasserstoff, Helium I und Helium II,

b) Strahlungsdruck

c) ideale Gasgleichung für die Ionen,

d) nichtrelativistische und relativistische Fermi-Dirac-Entartung der Elektronen bei beliebigem

Entartungsgrad (siehe KTW IV).

Gleichzeitig mit der Dichte werden aus bekannten thermodynamischen Beziehungen die Größen $\alpha = (d \log \varrho / d \log P)_T$, $\delta = -(d \log \varrho / d \log T)_P$, die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p und der adiabatische Temperaturgradient in der Form $\nabla_{ad} = (d \log T / d \log P)_s$ berechnet.

Die Opazitätswerte $\bar{\kappa}$ in Gleichung (5) als Funktion von Temperatur, Dichte und chemischer Zusammensetzung werden in Tabellenform für das Programm bereitgestellt. Dafür standen von COX und STEWART (1965) berechnete Opazitäten zur Verfügung, in denen bereits die Absorption in einer großen Zahl von Linien berücksichtigt ist. In den Opazitätstabellen ist auch der Energietransport durch die entarteten Elektronen berücksichtigt. Daher entfällt die bei Härm und Schwarzschild gemachte Annahme unendlicher Wärmeleitfähigkeit des entarteten Elektronengases und somit die eines ideal isothermen Kerns. Interpoliert wurde zwischen den $\bar{\kappa}$-Werten dreier verschiedener Tabellen, die für folgende Mischungen der chemischen Elemente gelten:

"Kippenhahn II", $X = 0.9$, $Y = 0.099$, $Z = 0.001$,

"Weigert IV", $X = 0$, $Y = 0.999$, $Z = 0.001$,

"Weigert V", $X = Y = 0$, $X_C = 0.999$, $Z = 0.001$.

Die schweren Elemente (Gesamtanteil Z) haben die gleichen relativen Häufigkeiten wie in der Sonne nach ALLER (1961).

Bei der Berechnung der nuklearen Energieproduktion pro Gramm und Sekunde, ϵ, gelten für das Wasserstoffbrennen (pp- und CNO-Zyklus) die gleichen Formeln wie in HKW I.

Für das Heliumbrennen enthält das Programm außer dem 3α-Prozeß noch die Energieerzeugungsraten der gleichzeitig ablaufenden Prozesse $C^{12}(\alpha,\gamma)O^{16}$ und $O^{16}(\alpha,\gamma)Ne^{20}$. Es werden nach REEVES (1965) folgende Formeln benutzt:

$$\varepsilon_{3\alpha\to C^{12}} = 3.46\cdot10^{11}\,y^3\rho^2 T_8^{-3}\,10^{-18.9/T_8}\cdot f_{3\alpha}, \qquad (11)$$

$$\varepsilon_{C^{12}\to O^{16}} = 2.68\cdot10^{27}\,y\,X_C\rho T_8^{-2}\,10^{-30.05\,T_8^{-1/3}}\cdot f_{C^{12}}, \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{O^{16}\to Ne^{20}} = 1.18\cdot10^{27}\,y\,X_O\rho T_8^{-2/3}\,10^{-37.2\,T_8^{-1/3}}\cdot f_{O^{16}} \qquad (13)$$

($T_8 = T/10^8{}^oK$). Die Rate für den Prozeß $C^{12}(\alpha,\gamma)O^{16}$ ist unsicher um einen Faktor 10 nach beiden Seiten wegen der nicht bekannten α-Teilchenweite.

Während des Helium-Flash sind allerdings die Beiträge nach den Formeln (12) und (13) noch vernachlässigbar gegenüber $\varepsilon_{3\alpha}$. Bei den relativ hohen Dichten ist der Abschirmfaktor $f_{3\alpha}$ nicht vernachlässigbar, besonders beim Zünden des 3α-Prozesses. Für den Grenzfall schwacher Abschirmung gilt unter Berücksichtigung der Entartung

$$\ln f_w = 2.26\cdot10^{-3}\,\frac{\rho^{1/2}}{T_8^{3/2}}\left[5-4y-2X_C-X_O+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\psi}\right)_T\right]^{1/2}. \qquad (14)$$

Diese Formel ergibt sich nach SALPETER (1954) für eine beliebige Mischung aus den Elementen Helium, Kohlenstoff, Sauerstoff und Neon (ψ: Entartungsparameter, die Größe $(d\ln\rho/d\psi)_T$ ist mit dem bei Salpeter auftretenden Term

f'/f identisch). Für den anderen Grenzfall der starken Abschirmung gilt nach Salpeter angenähert

$$\ln f_s = 0.01 \frac{\rho^{1/3}}{T_8} \tag{15}$$

Der interessierende ρ,T-Bereich erforderte eine Interpolation zwischen diesen beiden Grenzfällen, die Berechnung des endgültigen Abschirmfaktors erfolgte deshalb nach:

$$\begin{aligned} \ln f &= \ln f_w && \text{für } \ln f_w \leq 0.5, \\ \ln f &= \ln f_s && \text{für } \ln f_s \geq 2, \\ \ln f &= \frac{(2-\ln f_s)^2 \ln f_w + (\ln f_w - 0.5)\ln f_s}{(2-\ln f_s)^2 + (\ln f_w - 0.5)} && \text{sonst.} \end{aligned} \tag{16}$$

Mit dieser letzten Interpolationsformel ergab sich ein hinreichend glatter Verlauf von ln f in dem Übergangsgebiet zwischen schwacher und starker Abschirmung.

In der Energiebilanz für das Heliumbrennen wurde noch ein vierter Fusionsprozeß berücksichtigt, die Reaktion $N^{14}(\alpha,\gamma)F^{18}$. 95% des ursprünglichen Anteils von C, N und O liegen nach dem Wasserstoffbrennen über den CNO-Zyklus als N^{14} vor (REEVES [1966]). Die Reaktion setzt bei etwas niedrigeren Temperaturen ein als der 3α-Prozeß, für die Energieproduktion wurde nach REEVES (1966) angesetzt

$$\varepsilon_{N^{14}\to F^{18}} = \gamma X_{N^{14}} \rho T_8^{-2/3} 10^{35.1 - 33.72\, T_8^{-1/3}} \cdot f_{N^{14}}. \tag{17}$$

In den vorliegenden Rechnungen ist allerdings der Einfluß dieses Prozesses auf den Ablauf des Helium-Flash vernachlässigbar.

Vor dem Helium-Flash werden in der Nähe des Zentrums Werte von Temperatur und Dichte erreicht, bei denen die Energieverluste durch die Produktion von Neutrinos auf Grund der Theorie der schwachen Wechselwirkung nicht mehr zu vernachlässigen sind. Die Produktion von Neutrinos stellt einen Energieverlust dar, weil diese den Stern praktisch ohne Absorption verlassen können. Bei den hohen Dichten handelt es sich im wesentlichen um Plasmaneutrinos, deren Produktionsraten von ADAMS, RUDERMAN, WOO (1963) berechnet wurden. Die ursprünglich publizierten Raten waren um einen Faktor 4 zu groß (ZAIDI [1965]). Die Rechnungen wurden begonnen und zum wesentlichen Teil durchgeführt zu einer Zeit, als der Fehler in den Produktionsraten noch nicht bekannt war. Sie beruhen also auf der zu großen Produktionsrate, der Einfluß dieses Fehlers wird in Abschnitt "5.1 Wiederholungsrechnungen" diskutiert. Eine genaue Darstellung der benutzten Formeln findet sich bei WEIGERT (1966), eine graphische Darstellung der Energieverluste als Funktion von Dichte und Temperatur gibt Abbildung 5.

2.3 Änderung der chemischen Zusammensetzung

Für die Umwandlung von Wasserstoff in Helium gelten die in HKW I beschriebenen Gleichungen. Da für das Heliumbrennen außer dem 3α-Prozeß noch zwei weitere Kernprozesse gerechnet werden, ändern sich hier die Formeln für die Integration der chemischen Zusammensetzung gegenüber dem ursprünglichen

Programm. Für die beteiligten Elemente gelten folgende Gleichungen:

Helium:
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -AY^3 - BY, \tag{18}$$

Kohlenstoff:
$$\frac{\partial X_C}{\partial t} = AY^3 - 3CY, \tag{19}$$

Sauerstoff:
$$\frac{\partial X_O}{\partial t} = 8CY - 4BY, \tag{20}$$

Neon:
$$\frac{\partial X_{Ne}}{\partial t} = 5BY - 5CY. \tag{21}$$

Dabei sind

$$A = \frac{1}{Y^3}\,\frac{\varepsilon_{3\alpha\to C^{12}}}{E_{He}}, \tag{22}$$

$$B = \frac{1}{Y}\left(\frac{\varepsilon_{C^{12}\to O^{16}}}{E_C} + \frac{\varepsilon_{O^{16}\to Ne^{20}}}{E_O}\right), \tag{23}$$

$$C = \frac{1}{Y}\,\frac{\varepsilon_{C^{12}\to O^{16}}}{E_C}. \tag{24}$$

Die Werte E_{He}, E_C und E_O berechnen sich aus den pro Reaktion freiwerdenden Energiemengen Q_{He}, Q_C und Q_O wie folgt:

$$E_{He} = \frac{Q_{He}}{12 m_p}, \quad E_C = \frac{Q_C}{4 m_p}, \quad E_O = \frac{Q_O}{4 m_p}. \tag{25}$$

Da $\varepsilon_{3\alpha}$ sehr stark vom Heliumgehalt abhängt, wird Gleichung (18) ähnlich wie im bisherigen Programm für einen endlichen Zeitschritt $\Delta t = t_1 - t_0$ integriert, in dem A und B als konstant angenommen werden. Dabei ergibt sich

$$Y(t_1) = \frac{Y(t_0)}{\sqrt{A\,Y^2(t_0)\left(\frac{e^{2B\Delta t}-1}{B}\right) + e^{2B\Delta t}}} \qquad (26)$$

Diese Gleichung ersetzt Gleichung (18), die Gleichungen (19) und (20) werden ersetzt durch ihre Integrationen über den Zeitschritt Δt, in dem B und C als konstant angenommen werden:

$$X_C(t_1) = X_C(t_0) - Y(t_1) + Y(t_0) - (B+3C)\,Y_m\,\Delta t \qquad (27)$$

und

$$X_O(t_1) = X_O(t_0) + (8C - 4B)\,Y_m\,\Delta t \qquad (28)$$

mit

$$Y_m = 0.5\,(Y(t_0) + Y(t_1)).$$

Gleichung (21) braucht nicht integriert zu werden wegen $\Sigma X_i = 1$ (summiert über alle vorhandenen Elemente). In radiativen Zonen werden die Gleichungen (26) bis (28) auf jede einzelne Massenschale angewendet, in Konvektionszonen mit Heliumbrennen wird das von HOFMEISTER (1967) angegebene Integrationsverfahren benutzt.

3. Entwicklung vor dem Flash

3.1 Anfangsmodell

Die Entwicklungsrechnungen wurden begonnen mit dem chemisch homogenen Hauptreihenmodell. Dieses hatte folgende chemische Zusammensetzung:

Wasserstoffgehalt	X = 0.9,
Heliumgehalt	Y = 0.099,
Gehalt an schwereren Elementen	Z = 0.001.

Es ist nicht sicher, ob eine so heliumarme Mischung typisch für die Population II - Sterne in den Kugelhaufen ist. Der Heliumgehalt ist schwierig zu bestimmen, da die meisten Sterne für eine spektroskopische Untersuchung zu niedrige Effektivtemperaturen haben. TRAVING (1962) konstruierte Modellatmosphären für zwei B-Sterne, $+33^{\circ}2642$ im galaktischen Halo und Barnard 29 in dem Kugelhaufen M 13, und fand einen Heliumgehalt von Y = 0.31 bzw. Y = 0.21. SEARLE und RODGERS (1966) schätzen den Heliumgehalt eines Sternes auf dem horizontalen Ast in NGC 6397 aus sehr schwachen Heliumlinien auf $Y \approx 0.1$. O'DELL, PEIMBERT, KINMAN (1964) untersuchten einen planetarischen Nebel in M 15 und fanden $Y = 0.42 \pm 0.07$. Alle diese Beobachtungen geben den Heliumgehalt für hochentwickelte Sterne, der nicht immer mit dem ursprünglichen Heliumgehalt identisch sein muß. Sollte der tatsächliche Heliumgehalt der Population II höher sein als für diese Rechnungen angenommen, so würde das in erster Linie das Alter des Sterns herabsetzen, den Ablauf des Helium-Flash aber kaum wesentlich ändern.

Zur Lösung der Sternaufbau-Gleichungen mit der Henyey-Methode braucht man ein Näherungsmodell. Das wird in der Regel durch Extrapolation aus zwei vorhergehenden Modellen gewonnen. Für das erste Modell einer Entwicklungsrechnung muß es vorgegeben werden, wobei für Hauptreihenmodelle eine sehr grobe Annäherung genügt. Im vorliegenden Fall wurden 17 Punkte des bei SCHWARZSCHILD (1958) publizierten Hauptreihenmodells eines Sterns von einer Sonnenmasse dazu benutzt. Nach automatischem Einfügen von weiteren 80 Punkten durch Interpolation genügten 15 Iterationsschritte, um das Hauptreihenmodell mit der gewünschten Genauigkeit zu erhalten. Als Maß für diese Genauigkeit wurden die maximalen Änderungen der vier abhängigen Variablen zwischen zwei Iterationen benutzt, sie mußten unter folgende Grenzwerte sinken:

$$\Delta \ln P < 0.002, \quad \Delta \ln T < 0.002, \quad \Delta \ln r < 0.002, \quad \Delta S < 0.02.$$

Das Alter dieses Modells wurde gleich Null gesetzt und als Zeitschritt zum Modell 2 $\Delta t = 2.5 \cdot 10^8$ Jahre gewählt. Im Verlauf der weiteren Rechnungen ergab sich die Größe des Zeitschrittes zwischen zwei Modellen aus zwei Bedingungen:

a) Δt durfte nicht so groß werden, daß das Verfahren schlecht oder garnicht mehr konvergierte,

b) die Fehler, die durch das Rechnen mit zeitlichen Differenzen anstelle der Differentiale in den Gleichungen (1), (7), (8) und (18) bis (21) entstehen, sollen vernachlässigbar sein.

Die zweite Bedingung ist erfüllt, wenn eine Wiederholung

der Rechnung mit kleinerem Zeitschritt im Rahmen der geforderten Genauigkeit zum gleichen Modell führt.

3.2 Zentrales Wasserstoffbrennen

Das homogene Hauptreihenmodell hat eine Leuchtkraft von $L = 1.91\ L_\odot$, eine Effektivtemperatur von $T_e = 6760°K$ und damit einen Radius von $R = 1.02\ R_\odot$. Die äußere Konvektionszone reicht von der Oberfläche bis in eine Tiefe von etwa 5% des Sternradius und umfaßt damit sowohl die Wasserstoff- als auch die beiden Helium-Ionisationszonen. Im Zentrum liefert das Wasserstoffbrennen über den pp-Zyklus ($T_c = 1.48 \cdot 10^{7}°K$) eine Energie von $\varepsilon = 28.2$ erg g^{-1} sec^{-1}, der durch das Brennen entstandene konvektive Kern enthält 4.3% der Gesamtmasse. Der konvektive Kern wird rasch kleiner und verschwindet etwa bei Modell 7. Bei Modell 25, das entspricht einem Alter des Sterns von $5.2 \cdot 10^{9}$ Jahren, ist der Wasserstoffgehalt im Zentrum auf 1/10 seines ursprünglichen Wertes abgesunken, der Stern entfernt sich von der Hauptreihe (siehe Abbildung 1). Während des zentralen Brennens ist die Reaktionsrate auch in größerer Entfernung vom Zentrum (bis zu $M_r/M = 0.5$) noch hinreichend groß, um die Wasserstoffhäufigkeit merklich zu verringern (siehe Abbildung 2). Die Folge ist ein X-Profil, wie es in Abbildung 4 wiedergegeben ist (Modell 83). Nach dem Leerbrennen des Zentrums (Modell 59) setzt eine Kontraktionsphase des Zentralgebietes ein, während der der Stern im Hertzsprung-Russell-Diagramm nach rechts wandert.

3.3 Wasserstoffbrennen in einer Schale

Modell 27 (Wasserstoffgehalt im Zentrum 6.1%) zeigt bereits zwei relative Maxima der nuklearen Energieerzeugung. Das eine liegt im Zentrum. Hier ist die Temperatur so hoch, daß der CNO-Zyklus dominiert. Weiter außen ist die Reaktionsrate geringer infolge der abnehmenden Temperatur. Der Anstieg in der Wasserstoffhäufigkeit reicht zur Kompensation des Temperaturabfalls in der Gleichung für die Energieerzeugung nicht aus, da der CNO-Zyklus sehr stark von der Temperatur abhängt. Beim Übergang zum pp-Zyklus wird die Abhängigkeit von der Temperatur schwächer, die Abhängigkeit vom Wasserstoffgehalt stärker, es kommt zu einem Anstieg der Energieproduktion mit wachsender Entfernung vom Zentrum und bei $M_r/M = 0.06$ zu einem zweiten Maximum. Aus diesem entsteht nach dem Leerbrennen des Zentrumsgebietes die Schalenquelle. Gleichzeitig vergrößert sich die äußere Konvektionszone infolge der abnehmenden Effektivtemperatur des Sterns. Etwa mit Modell 83 liegt der Stern im Hertzsprung-Russell-Diagramm dicht an der Linie für vollkonvektive Modelle (Hayashi-Grenze), die äußere Konvektionszone umfaßt bereits 25% der Sternmasse und reicht bis in eine Tiefe von einem halben Sternradius. Der Stern wandert nun die Hayashi-Grenze entlang ins Gebiet der roten Riesen. Die Konvektionszone wächst weiter nach innen, die Schalenquelle brennt nach außen. Damit gewinnt der Heliumkern ständig an Masse, sein Radius dagegen nimmt ab (bei Modell 699 ist der Radius des Heliumkerns auf 65% seines Wertes bei Modell 95 abgesunken).

Ein Teil der im Kern freiwerdenden Gravitationsenergie dient dazu, die innere Energie des Kerns und damit seine Temperatur zu erhöhen. Die Hülle des Sterns bläht sich auf bis zu einem Radius von $R = 125\ R_\odot$ (Modell 699). Bei fortschreitender Kontraktion tragen die Elektronen im Kern infolge zunehmender Entartung immer mehr zum Gasdruck bei, durch ihre hohe Wärmeleitfähigkeit wird der Kern nahezu isotherm. Die nach außen brennende Schalenquelle hindert die äußere Konvektionszone - bei einem Alter des Sterns von $t = 7.37 \cdot 10^9$ Jahren (Modell 180) - am weiteren Wachsen in Masse (Abbildung 2). Der tiefste von der Konvektionszone erreichte Punkt ist $M_r/M = 0.24$. Damit reicht sie in ein Gebiet hinein, in dem früher bereits Wasserstoff teilweise in Helium umgewandelt wurde. Sie wird also Helium nach außen mischen und eine Stufe in der Wasserstoffhäufigkeit schaffen (siehe Modell 180 in Abbildung 4). Bis Modell 180 hat sich der Heliumgehalt an der Oberfläche von $Y = 0.099$ auf $Y = 0.116$ geändert, was einer Zunahme von 17% des ursprünglichen Heliumgehaltes entspricht. Bis zu diesem Zeitpunkt war die Temperatur an der Stelle $M_r/M = 0.24$ niemals höher als $14 \cdot 10^6$°K. Das ist zu niedrig, um den Kohlenstoffgehalt durch die Reaktion $C^{12}(p,\gamma)N^{13}$ zu verringern. Dementsprechend ändern sich die Häufigkeiten von Kohlenstoff und Stickstoff an der Oberfläche nicht.

Die durch die äußere Konvektionszone erzeugte Stufe in X hat noch eine andere Wirkung. Erreicht nämlich die Schalenquelle diese Stufe, so steht ihr plötzlich ein um $\Delta X = 0.2$

erhöhter Wasserstoffgehalt zur Verfügung. Das Einstellen darauf ruft zwischen Modell 230 und Modell 243 eine vorübergehende Kontraktion der Hülle hervor (siehe Abbildung 1), der Entwicklungsweg läuft kurzzeitig in sich selbst zurück.

Während der Kontraktionsphase des Kerns taucht eine Schwierigkeit auf, die ihre Ursache in der Schalenquelle hat. Diese wird nämlich umso dünner, je weiter sie nach außen brennt. Eine Verschiebung der Schalenquelle um ihre eigene Dicke in der Massenskala muß man in etwa zehn Zeitschritten rechnen, damit die Differentialgleichungen für die Umwandlung von Wasserstoff in Helium noch hinreichend genau durch Differenzengleichungen approximiert werden können. Bei Modell 152 hat die Schalenquelle eine Massendicke von $\delta M_r/M = 0.005$. Bis zum Zünden des Heliums muß die Masse des Kerns um etwa $\Delta M_r/M = 0.25$ zunehmen. Das ergäbe eine Zahl von 500 Modellen bis zum Flash, wenn diese Dicke konstant bliebe, tatsächlich aber wesentlich mehr, da die Dicke ständig abnimmt. Man muß also nach einem Verfahren suchen, das die Zahl der zu rechnenden Modelle verringert. Die hierfür entwickelte Methode ist in Anhang A beschrieben. Sie wurde ab Modell 152 benutzt, um die Kontraktionsphase bis zum Einsetzen des Heliumbrennens (ungefähr bei Modell 700) zu rechnen.

3.4 Neutrinos

Aus Abbildung 5 ist ersichtlich, daß vor dem Zünden des Heliumbrennens die Energieverluste durch Neutrinos merklich

werden. Die Berücksichtigung der Neutrinoverluste in der Energiebilanz erfolgte erst ab Modell 341. Da diese im Zentrum bereits vergleichbar mit der Kontraktionsenergie waren, gab es im Temperatur-Dichte-Diagramm (Abbildung 3) einen leichten Knick in der Entwicklungslinie des Zentrums. In der Umgebung des Zentrums ist ε_g kleiner als ε_ν und damit die Energiebilanz negativ (für Modell 401 im Zentrum: $\varepsilon_g = 1.0$ erg g^{-1} sec^{-1}, $\varepsilon_\nu = 2.8$ erg g^{-1} sec^{-1}). Das bedeutet, daß Energie von weiter außen zum Zentrum transportiert werden muß, was zur Ausbildung eines positiven Temperaturgradienten führt (unter dem Temperaturgradienten sei hier die skalare Größe dT/dr verstanden). Die Abweichung von der Isothermie ist jedoch nach wie vor klein. Doch erfolgt jetzt das Zünden des Heliums nicht im Zentrum selbst, sondern in derjenigen Schale um das Zentrum, in der die Temperatur ihren Maximalwert hat (THOMAS [1965]). In Modell 699 liegt das Temperaturmaximum bei $M_r/M = 0.325$, das entspricht 45% des Heliumkern-Radius oder dem 10^{-4}-ten Teil des Sternradius. Den Verlauf der Temperatur im Kern geben die Abbildungen 7 und 8 wieder (Kurve 1). Der Einfluß des oben erwähnten Fehlers in den Plasmaneutrinoraten wird in Abschnitt "5.1 Wiederholungsrechnungen" diskutiert.

4. Helium-Flash

4.1 Anlaufphase

Aus Abbildung 6 wird deutlich, daß in Modell 699 der Helium-Flash bereits begonnen hat: in der Gegend des Temperaturmaximums ist ε_g negativ geworden als Reaktion auf die plötzlich freiwerdende nukleare Energie des Heliumbrennens. Diese Energie wird verbraucht, indem die innere Energie des Gases und damit die Temperatur erhöht wird. Da damit aber die nukleare Energieproduktion weiter steigt, kommt es zu dem als Flash bekannten Phänomen. Die zwei anderen Möglichkeiten, sich auf das neugezündete Brennen einzustellen, sind dem Stern momentan versperrt: für den Abtransport der überschüssigen Energie ist der Betrag des Temperaturgradienten zu gering, einen Verbrauch der Energie durch Expansion verhindert die starke Entartung des Gases. Diese qualitativen Argumente werden gestützt durch die im Anhang zu KTW V (Kohlenstoff-Flash) durchgeführte Stabilitätsanalyse nuklearer Brennprozesse im Zentrum eines Sterns. Das Zünden des Brennprozesses in einer Schale um das Zentrum ändert nichts an dem Auftreten der Instabilität bei starker Entartung (siehe Anhang B). Der Flash sollte jedoch, verglichen mit einem ohne Berücksichtigung von Neutrinos gerechneten zentralen Flash, weniger heftig werden, da der Grad der Entartung in der Schale geringer ist als bei einem entsprechenden Modell im Zentrum (siehe Tabelle 5). Die Zeitskala der Entwicklung des Gesamtsterns wird bei Modell 699 noch vom nuklearen Brennen in der Schalenquelle bestimmt. Bezeichnet

man mit τ die Zeit, in der sich die Temperatur in einer bestimmten Massenschale um den Faktor e erhöht, so ergibt sich $\tau = 10^{12}$ sec im Gebiet der wasserstoffbrennenden Schalenquelle und $\tau = 10^{14}$ sec für das Temperaturmaximum bei $M_r/M = 0.3$. Die Temperaturänderungen in der wasserstoffbrennenden Schalenquelle sind also um den Faktor 100 schneller als im Gebiet des Heliumbrennens. Diese Werte stammen aus dem Vergleich zweier aufeinanderfolgender Modelle. Für das Flash-Gebiet läßt sich unter folgenden Annahmen eine Zeitskala aus den Zustandsgrößen eines Modells abschätzen:

a) in der Anlaufphase bleibt die Dichte konstant (siehe Abbildung 3),

b) die freiwerdende Energie wird nicht abtransportiert.

Dann folgt aus dem Energiesatz (Gleichung (1))

$$\varepsilon_{He} - c_V \dot{T} = 0$$

oder

$$\tau_{fl} := \frac{T}{\dot{T}} = \frac{c_V T}{\varepsilon_{He}} \,. \qquad (29)$$

Mit $c_V \approx \varkappa \approx 10^8$ erg g^{-1} $grad^{-1}$, $T \approx 10^8$°K und $\varepsilon_{He} \approx 10^2$ erg g^{-1} sec^{-1} (siehe Modell 699 in Tabelle 2) ergibt sich $\tau_{fl} = 10^{14}$ sec, in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert.

Ab Modell 726 wird die Schalenquelle nicht mehr verschoben, da die im Flash-Gebiet immer rascher zunehmende Temperatur keine so großen Zeitschritte mehr zuläßt. Bis Modell 753 wird der Zeitschritt noch durch die Änderung von X in der

Schalenquelle bestimmt. In Modell 753 ist die Temperatur gegenüber Modell 699 im Maximum um $\Delta \log T = 0.041$ auf $\log T = 7.994$ gestiegen. Damit ist ε_{He} um den Faktor 100 auf 10^4 erg g^{-1} sec^{-1} angestiegen, die Zeitskala des Wasserstoffbrennens und die des Flash sind gleich. Der Verlauf der Temperatur über der Masse ist dabei noch symmetrisch relativ zum Temperaturmaximum, das jetzt bei $M_r/M = 0.30$ liegt. Diese Symmetrie bleibt bestehen bis Modell 762 (siehe Abbildung 7). Bei diesem Modell ist der Betrag des Temperaturgradienten oberhalb des Maximums größer als der Betrag des adiabatischen Gradienten geworden, es bildet sich dort eine konvektive Schale aus. Damit kann aber Gleichung (29) in dieser Form nicht mehr richtig sein. Bedingung b) wird erst außerhalb der konvektiven Schale erfüllt. Gleichzeitig wird der Massenbereich ΔM_k, in dem die Temperaturerhöhung stattfindet, die gesamte Konvektionszone umfassen und so wesentlich größer sein als der Massenbereich ΔM_ε, in dem die nukleare Energie erzeugt wird. Die rechte Seite von Gleichung (29) ist also noch mit dem Verhältnis dieser beiden Massen zu multiplizieren als eine Art Mittelung über das betreffende Gebiet, also

$$\tau_{fl} = \frac{c_v T}{\varepsilon_{He}} \frac{\Delta M_k}{\Delta M_\varepsilon} . \qquad (30)$$

ΔM_ε wird etwa gleich der Halbwertsbreite der Funktion $\varepsilon(M_r)$ sein, ΔM_k die Masse in der konvektiven Zone. Nach dieser Formel wurden die Werte für τ_{fl} in Tabelle 2 berechnet. Sie gibt auch für spätere Phasen, in denen die Dichte abnimmt (siehe Abbildung 3), also Bedingung a) verletzt ist,

die richtige Größenordnung von τ_{fl} wieder. Für die Expansionsphase gilt genähert $\dot{T} = 0$. Dann folgt aus dem Energiesatz

$$\varepsilon_{He} + \frac{P}{\rho^2}\dot{\rho} = 0 . \qquad (31)$$

Wegen der geringen Entartung gilt näherungsweise die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T . \qquad (32)$$

Damit folgt aber als Zeitskala der Expansion

$$\tau_{fl} = \left|\frac{\rho}{\dot{\rho}}\right| = \frac{\frac{\mathcal{R}}{\mu}T}{\varepsilon_{He}} \frac{\Delta M_k}{\Delta M_\varepsilon} . \qquad (33)$$

Wegen $\mu \approx 1$ und $c_v \approx \mathcal{R}$ liefert diese Gleichung die gleiche Größenordnung für die Zeitskala der Entwicklung wie Gleichung (30).

Die entstandene Konvektionszone verhindert ein weiteres Anwachsen des Temperaturgradienten, während der Temperaturverlauf innerhalb des Maximums beliebig steil werden kann, da eine Schichtung mit positivem Temperaturgradienten stets stabil gegen Konvektion ist. In Modell 832 reicht die innere Konvektionszone bereits von $M_r/M = 0.29$ (Temperaturmaximum) bis $M_r/M = 0.37$. Am Innenrand der Konvektionszone fällt die Temperatur sehr steil ab, dadurch wird die Ausbreitung des Flash nach innen begrenzt. Zur Abschätzung der maximalen Geschwindigkeit, mit der sich diese Grenze zum Zentrum hin bewegt, läßt sich folgende aus dem Energiesatz abgeleitete Formel benutzen:

$$|L_r| \cdot \tau \approx c_v |\Delta T| \cdot |\Delta M_r| \qquad (34)$$

Dies gilt, wenn die gesamte Leuchtkraft zur Erhöhung der inneren Energie der betreffenden Schicht verbraucht wird. Hierbei ist τ die Zeitskala, in der sich eine "Temperaturwand" der Höhe ΔT um ihre Dicke ΔM_r verschiebt, L_r die durch die Wand transportierte maximale Energie pro Zeiteinheit. Die nukleare Energieerzeugung geht nicht explizit ein, wenn man die Steilheit der Wand in Form von ΔT und ΔM_r als gegeben ansieht, die natürlich von der im Temperaturmaximum erzeugten nuklearen Energie abhängt. Die danach berechnete "Geschwindigkeit in der Massenskala"

$$v_m := \frac{\left|\Delta \frac{M_r}{M}\right|}{\tau} = \frac{L}{M c_V} \left| \frac{L_r/L}{\Delta T} \right| \qquad (35)$$

ergibt beispielsweise für Modell 919 mit $L/(M \cdot c_V) = 10^{-4.4}$ grad sec^{-1}, $(L_r/L)_{min} = -55$ und $\Delta T = 10^{7.9}$ °K den Wert $v_m = 10^{-10.6}$ sec^{-1}. Bei diesem Modell beträgt die Zeitskala für das Anwachsen des Flash (siehe Tabelle 2) $\tau_{fl} = 10^6$ sec, in dieser Zeit ergibt sich also eine Verschiebung der Wand um $\Delta M_r/M = 0.00003$. Mit einem weiteren Aufsteilen der Wand wächst zwar die Geschwindigkeit v_m, aber auch die Flash-Zeitskala nimmt ab. Das macht klar, warum während des Flash die Temperaturwand unterhalb des Brenngebietes in Masse praktisch fest bleibt (Abbildung 7). Der Betrag des Temperaturgradienten im entarteten Kern ist trotz niedriger Opazitätswerte (κ fällt unter Berücksichtigung der Elektronenleitung von 0.1 cm^2 g^{-1} am Rand des entarteten Kerns bis auf 0.001 cm^2 g^{-1} im Zentrum des Sterns) viel zu klein, um Energie aus dem Flash-Gebiet abtransportieren zu können. Der Aufbau eines entsprechend

großen Temperaturgradienten erfolgt durch Vorrücken der Temperaturwand in Richtung des Zentrums. Das heißt, v_m ist auch als die Geschwindigkeit zu verstehen, mit der die im Flash-Gebiet produzierte Energie in den entarteten Kern eindringen kann. Der entartete Kern vermag also nach der obigen Abschätzung während des Flash praktisch keine Energie aufzunehmen. Damit wird aber der Flash in einer Schale dem zentralen Flash in seinem Ablauf sehr ähnlich.

Für die Wand ist $|d \log T/dM_r|$ sehr groß, das hat aber wegen der geringen Masse in der Wand keinen Einfluß auf die Größe $d \log P/dM_r$, es wird also für eine genügend steile Wand stets gelten

$$\left| \frac{d \log T}{dM_r} \right| \gg \left| \frac{d \log P}{dM_r} \right| . \qquad (36)$$

Daraus folgt für die Steigung der Kurven in Abbildung 8 im Bereich der Temperaturwand

$$\frac{d \log T}{d \log \rho} \approx \left(\frac{d \log T}{d \log \rho} \right)_P = - \frac{1}{\delta} , \qquad (37)$$

das heißt, die Steigung berechnet sich aus der Zustandsgleichung allein. Im vorliegenden Gebiet ist der Strahlungsdruck vernachlässigbar und die Entartung nichtrelativistisch. Dann gilt

$$\rho = F(\psi)\, T^{3/2} ,$$
$$P = G(\psi)\, T^{5/2} .$$

$F(\psi)$ und $G(\psi)$ sind bekannte Funktionen von ψ (siehe zum Beispiel HKW I) und die Steigung hängt damit nur noch vom

Wert des Entartungsparameters ψ ab. Deshalb schneiden alle Kurven in diesem Teilbereich eine Linie konstanten Entartungsparameters unter gleichem Winkel. Testrechnungen für einige Werte von ψ ergaben Steigungen, die im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit den tatsächlichen Steigungen übereinstimmten.

Für die Energiebilanz spielt der Energieverlust durch Neutrinos nach dem Zünden des Heliums keine Rolle mehr. Im Flash-Gebiet ist die durch das Heliumbrennen erzeugte Energie wesentlich größer als die Neutrinoenergie, im entarteten Kern überwiegt das ε_g-Glied infolge der raschen Entwicklung. Die Berücksichtigung der Neutrinoproduktion ist also nur wichtig für die Festlegung der Massenschale, in der das Helium gezündet wird. Dazu ist es allerdings nötig, die Annahme eines isothermen entarteten Kerns fallenzulassen, das heißt, es muß die endliche Wärmeleitfähigkeit der teilweise entarteten Elektronen berücksichtigt werden.

4.2 Expansionsphase

Mit dem Ansteigen der Temperatur im Flash-Gebiet nimmt die Entartung ab, damit wird in steigendem Maße eine Expansion des Gebietes möglich, ein wachsender Anteil der nuklearen Energie wird in Form von Volumenarbeit verbraucht und immer weniger Energie dient zur Temperaturerhöhung. Da nach Gleichung (11) für $T = 2 \cdot 10^8 {}^oK$ näherungsweise gilt $\varepsilon_{He} \sim \varrho^2 T^{12}$, kann eine bestimmte relative Temperaturzunahme

durch eine sechsmal größere relative Dichteabnahme kompensiert werden. Von dem Moment an, wo das der Fall ist, wird die Energieerzeugung im Flash-Gebiet wieder abnehmen, der Höhepunkt des Flash ist überschritten, auch wenn die Temperatur im Maximum noch zunimmt. Das Modell mit der maximalen Energieerzeugung ist Modell 1035, es wurde daher auch als neuer Nullpunkt für die Zeitzählung während des Flash benutzt. Diese Zeitzählung ist sowohl in den Tabellen 2 bis 4, als auch für die Abszisse in den Abbildungen 9 bis 11 benutzt.

Mit dem Abnehmen der nuklearen Energieerzeugung wächst auch die Konvektionszone entsprechend langsamer, da weniger Energie durch Temperaturerhöhung und Expansion verbraucht werden muß. Durch das radiative Gebiet oberhalb der Konvektionszone kann noch keine Energie abfließen, da die Entwicklung noch zu rasch abläuft, um eine entsprechende Änderung des Temperaturgradienten zu ermöglichen. Eventuelle Dichte- und Temperaturänderungen müssen in diesem Gebiet praktisch adiabatisch ablaufen, das heißt, parallel zu Linien ψ = const. (siehe punktierte Linien in Abbildung 8). Die Rechnungen ergeben, daß durch die Expansion in dem tiefer liegenden Flash-Gebiet die radiative Zone als Ganzes angehoben wird, das heißt, in ihr ist

$$\frac{d\dot{r}}{dM_r} = 0 \qquad (38)$$

Als Folge der sphärischen Gestalt ändert sich damit die Dichte und zwar notwendigerweise so, daß die relative Dichteänderung um so geringer ist, je größer der Radius der

betreffenden Massenschale ist. Das ergibt sich, wenn man Gleichung (4) nach der Zeit differenziert:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial M_r} = -\frac{1}{4\pi r^2 \rho}\left(2\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) \tag{39}$$

und Gleichung (38) benutzt:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} \sim \frac{1}{r} \tag{40}$$

Wegen der Adiabasie ($\epsilon_g \approx 0$) gilt dann auch

$$\frac{\dot{T}}{T} \sim \frac{1}{r} \tag{41}$$

Das heißt aber, die Temperatur nimmt in dem radiativen Gebiet innen stärker ab als weiter außen, es muß sich ein positiver Temperaturgradient ausbilden (siehe Abbildungen 7 und 8).

Für den entarteten Kern unterhalb $M_r/M = 0.29$ gilt wie für das radiative Gebiet oberhalb der Konvektionszone, daß Zustandsänderungen nur adiabatisch erfolgen können. Durch die Expansion des Flash-Gebietes nimmt aber das Gewicht der über dem Kern liegenden Materie ab, da es in Bereiche geringerer Schwerebeschleunigung gehoben wird, der Kern kann adiabatisch expandieren. Die Expansion ist dort am größten, wo die Entartung am niedrigsten ist, das ist dicht unterhalb der Kerngrenze bei $M_r/M = 0.29$. Dort kommt es wegen der Adiabasie auch zur größten Temperaturerniedrigung, der ursprünglich positive Temperaturgradient des Kerns wird dort negativ und sein Betrag erreicht nahezu den des adiabatischen Gradienten (Abbildung 8). Im Flash-Gebiet selbst steigt die Temperatur noch etwas an, durchläuft bei

Modell 1087 ihren Maximalwert und sinkt dann wieder infolge der abnehmenden nuklearen Energieproduktion.

4.3 Abkühlphase

Im Höhepunkt des Flash bei Modell 1035 enthält das Gebiet zwischen der inneren Konvektionszone und der chemischen Diskontinuität bereits weniger als 1% der Sternmasse. Die Konvektionszone scheint in den Abbildungen 7 und 9 der chemischen Diskontinuität sehr nahe gekommen zu sein. Doch ändern sich gerade unterhalb der Diskontinuität Druck und Dichte sehr stark, die Differenz im Logarithmus der Dichte zwischen chemischer Diskontinuität und oberer Grenze der inneren Konvektionszone (siehe Kurve 6 in Abbildung 8) ist daher noch ganz beträchtlich. Im weiteren Verlauf nimmt die Entartung in der Konvektionszone weiter ab, die nukleare Energieerzeugung geht zurück, ist aber noch groß genug, um die Konvektion aufrechtzuerhalten. Etwa bei Modell 1278 erreicht die Konvektionszone ihre in der Massenskala größte Annäherung an die Diskontinuität, die Massendifferenz beträgt nur noch $\Delta M_r/M = 0.0002$. Im Logarithmus der Dichte ergibt sich ein Unterschied von $\Delta \log \varrho = 0.35$ zwischen diesen beiden Punkten. Das ist ein etwas geringerer Wert als der von HÄRM und SCHWARZSCHILD (1964) für den zentralen Flash gefundene, aber es ist nach der Untersuchung von SASLAW und SCHWARZSCHILD (1965) über das Überschießen von Konvektionselementen auch hier nicht zu erwarten, daß Wasserstoff in das Flash-Gebiet gemischt wird. Die Frage,

ob unter etwas veränderten Bedingungen das Mischen doch noch möglich ist, kann aus den vorliegenden Rechnungen nicht beantwortet werden. Da die Differenz in log ϱ hier etwa halb so groß ist, wie bei den Rechnungen von Härm und Schwarzschild, ist es nicht auszuschließen, daß unter etwas anderen Anfangsbedingungen für den Flash die Konvektionszone die Diskontinuität erreicht.

An der Diskontinuität ist die Temperatur durch die adiabatische Abkühlung unter den für das Wasserstoffbrennen notwendigen Wert gesunken, ohne daß sich dabei die Leuchtkraft des Sterns geändert hätte. Diese beginnt erst etwa 10 Jahre nach dem Flash abzusinken. Die Verzögerung wird durch die radiative Schicht zwischen den beiden Konvektionszonen verursacht, die Zeitdifferenz entspricht der lokalen Kelvin-Helmholtz-Zeitskala dieser Schicht. Mit dem Absinken der Leuchtkraft schrumpft die äußere Konvektionszone in Masse (Abbildung 10). 500 Jahre nach dem Flash ist die Energieerzeugung im heliumbrennenden Gebiet so weit abgesunken, daß die innere Konvektionszone verschwindet. Der Temperaturverlauf beginnt sich auf die neue Energiequelle einzustellen. Zunächst verschwindet das Temperaturminimum, das am oberen Rand der inneren Konvektionszone entstanden war. Danach expandiert der Teil des Heliumkerns, der jetzt oberhalb der heliumbrennenden Schale liegt und folglich zur Hülle des Sterns gehört. Die äußere Konvektionszone wächst wieder nach innen (ab Modell 1364), gleichzeitig steigt die Leuchtkraft des Sterns mit wachsendem Radius der Hülle (Abbildung 11).

Erreicht die äußere Konvektionszone die chemische Diskontinuität, so wird Helium an die Oberfläche gemischt. Da sich die Diskontinuität bei $M_r/M = 0.434$ befindet, die Konvektionszone aber (ca. 4000 Jahre nach dem Flash, Modell 1558) eine Tiefe von $M_r/M = 0.417$ erreicht (siehe Abbildung 10), ergibt sich ein Verdünnungsverhältnis für den Heliumgehalt unterhalb der chemischen Diskontinuität von 1 : 34, das heißt ein Ansteigen des Heliumgehalts an der Oberfläche um $\Delta Y = 0.03$ auf $Y = 0.15$. Da die innere Konvektionszone während des Flash die Diskontinuität nahezu erreichte, gilt für den während des Flash produzierten Kohlenstoff das Gleiche wie für das Helium. Während des Flash waren 2.6% Kohlenstoff entstanden. Infolgedessen hat die Kohlenstoffhäufigkeit an der Oberfläche bei Modell 1558 um den Wert $\Delta X_C = 0.0008$ zugenommen. Das bedeutet eine Erhöhung des Kohlenstoffgehalts um den Faktor 4 (THOMAS [1966]), alles in der Form von C^{12}, dem Endprodukt des 3α-Prozesses. Außerhalb des Heliumkerns sind die Temperaturen zu niedrig für die Reaktion $C^{12}(p,\gamma)N^{13}(e^+\nu)C^{13}$, so daß das C^{12}-Isotop ohne Umwandlung bis an die Oberfläche gemischt wird.

Im Höhepunkt des Helium-Flash werden Temperaturen von $3 \cdot 10^8$°K erreicht. Bei solchen Temperaturen läuft die folgende Kernreaktionskette ab:

$$N^{14}(\alpha,\gamma)F^{18}(e^+\nu)O^{18}(\alpha,\gamma)Ne^{22}(\alpha,n)Mg^{25}.$$

Auf diese Weise können im Sterninnern Neutronen in großer Zahl produziert werden. Dabei ist N^{14} das Endprodukt, das während des CNO-Zyklus aus C^{12}, N^{14} und O^{16} entsteht.

95% des ursprünglichen C, N und O liegen nach dem Wasserstoffbrennen als N^{14} vor, wenn in dem betreffenden Gebiet das Wasserstoffbrennen über den vollen CNO-Zyklus lief. Das ist für das Flash-Gebiet $0.29 < M_r/M < 0.43$ der Fall. In einer zusätzlichen Rechnung wurde deshalb der Abbau des Ne^{22} während des Flash aufintegriert. Die Temperaturen sind so hoch, daß auch während der kurzen Flash-Phase alles N^{14} in Ne^{22} umgewandelt wird (Reaktionsraten nach REEVES [1966]), reichen aber nicht aus, um einen wesentlichen Teil des Ne^{22} abzubauen. Es bleibt vorläufig offen, ob Rechnungen mit korrigierten Neutrinoraten und anderen Massen zu einer höheren Neutronenproduktion führen können.

4.4 Stabilität der Kohlenstoffschicht

Da sich während des Flash bei $M_r/M = 0.29$ ein Temperatursprung ausgebildet hatte (Abbildung 7), wird unterhalb dieser Grenze kein Helium zu Kohlenstoff verbrannt. Die Temperaturwand verschiebt sich zwar zum Zentrum hin, aber mit einer Geschwindigkeit, die bei Modell 1278 nach Gleichung (35) $v_m = 6 \cdot 10^{-12}$ sec^{-1} beträgt. Das ergibt für eine Massendifferenz von $\Delta M_r/M = 0.3$ einen Zeitraum von 1000 Jahren, nach dem die Wand das Zentrum erreicht hätte. Das ist aber nur eine untere Grenze, denn mit dem weiteren Abkühlen im Flash-Gebiet wird der Temperaturabfall flacher und damit verringert sich die Geschwindigkeit der Wand. In solchen Zeiträumen werden durch das Heliumbrennen beträchtliche Mengen Kohlenstoff produziert, die über dem

entarteten Heliumkern eine Schicht mit höherem Molekulargewicht erzeugen. Das kann nach dem Kriterium für dynamische Instabilität

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} + \frac{d \log \mu}{d \log P} \qquad (42)$$

zu Konvektion führen, obwohl das Gebiet durch den positiven Temperaturgradienten besonders stabil sein sollte. Für eine Abschätzung kann man ∇_{ad} vernachlässigen, im vorliegenden Fall ist nämlich $|\nabla_{rad}| \gg |\nabla_{ad}|$. Damit läßt sich das Kriterium schreiben als

$$\left| \frac{d \log \mu}{dM_r} \right| > \left| \frac{d \log T}{dM_r} \right| . \qquad (43)$$

Der Unterschied im Molekulargewicht zwischen Kohlenstoff und Helium beträgt $|\Delta \log \mu| = 0.11$. Würde sich also an den entarteten Heliumkern eine reine Kohlenstoffschicht anschliessen, so müßte in der Übergangszone zwischen reinem Helium und reinem Kohlenstoff die Temperatur sich um mindestens $|\Delta \log T| = 0.11$ ändern und zwar so, daß das Helium kühler ist. Fiele die Temperaturänderung unter diesen Wert, dann würde das Gebiet instabil und Kohlenstoff würde in den Heliumkern gemischt. Diese Art dynamischer Instabilität würde möglicherweise in späteren Phasen auftreten, wenn schon eine beträchtliche Menge Kohlenstoff entstanden ist. In den tatsächlich gerechneten Modellen kam es aber nicht zur Ausbildung einer reinen Kohlenstoffschicht über dem Heliumkern. Bereits im Falle einer mit Kohlenstoff angereicherten Schicht über reinem Helium ist nämlich zu fragen, ob bei dynamisch stabiler Schichtung säkulare

Instabilitäten zur Durchmischung führen können. Dies ist Gegenstand einer gesonderten Untersuchung. Die vorläufigen Ergebnisse führen zu säkularer Instabilität einer solchen Schicht. Deshalb wurde ab Modell 1130 der produzierte Kohlenstoff in den entarteten Heliumkern gemischt. Die weiteren Entwicklungsrechnungen können damit aber nur unter Vorbehalt für richtig angesehen werden. Zunächst sind allerdings keine großen Unterschiede zwischen durchmischter und undurchmischter Entwicklung zu erwarten, da infolge der noch immer raschen Entwicklung nicht viel Kohlenstoff entsteht.

4.5 Einsetzen der Pulse

Das Absterben der Wasserstoffschalenquelle hat eine Umschichtung des ganzen Sterns zur Folge. War bisher die Wasserstoffschalenquelle die Grenze zwischen kontrahierendem Kern und expandierender Hülle, so wird diese Grenze jetzt von der heliumbrennenden Schale gebildet. Das Gebiet zwischen diesen beiden Stellen im Stern expandiert, da es jetzt zur Hülle gehört. Eine Folge davon ist, daß die äußere Konvektionszone nach innen wächst und so die Diskontinuität weiter nach innen schiebt (siehe "4.3 Abkühlphase"). Die heliumbrennende Schale und der entartete Kern kontrahieren, die Hülle expandiert, die Leuchtkraft des Sterns steigt wieder an (zwischen Modell 1365 und Modell 1562 in Abbildung 11). Die Temperatur in der heliumbrennenden Schale ist bei Modell 1365 auf $T = 1.4 \cdot 10^8 {}^oK$ abgesunken. Die Schalenquelle sei durch die

Bedingung $\varepsilon_{He} > 10^2$ erg g^{-1} sec^{-1} abgegrenzt. Damit ist ihr Innenrand durch den Ort der Temperaturwand bestimmt, während der äußere Rand vom Temperaturverlauf abhängt. Unter bestimmten Bedingungen, die zuerst von SCHWARZSCHILD und HÄRM (1965) untersucht wurden, können in dünnen Schalenquellen thermische Instabilitäten auftreten. Für die Schalenquelle wird deshalb in Anhang B eine Stabilitätsanalyse in der gleichen Weise durchgeführt, wie für die Zentralkugel im Anhang zu KTW V. Das Ergebnis dieser Analyse ist, daß in Übereinstimmung mit Schwarzschild und Härm eine zu dünne Schalenquelle auch bei Gültigkeit der idealen Gasgleichung thermisch instabil sein muß. Sind r_a und r_i der äußere und innere Rand der Schalenquelle, so wird diese instabil, wenn (unter vereinfachenden Annahmen) $x = r_i/r_a > 0.63$ wird. In Tabelle 3 sind die Werte r_i, r_a und x für ausgewählte Modelle angegeben. Das Alter wird vom Höhepunkt des Flash aus gerechnet. Aus der Tabelle geht hervor, daß der Radius des äußeren Randes der Schalenquelle abnimmt, während der Radius des inneren Randes nahezu konstant bleibt. Das bedeutet, daß mit abnehmender Energieerzeugung das durch den Flash aufgeblähte Brenngebiet wieder kontrahiert, während der entartete Kern seinen Radius beibehält. Das Schrumpfen der Schalenquelle in Masse liefert hier nur einen geringen Beitrag zur Radiusänderung, der Hauptbeitrag kommt von der Kontraktion. Die Lage der Schalenquelle ändert sich während der immer noch raschen Entwicklung - es wird nur wenig Helium in Kohlenstoff umgewandelt - kaum. Die Temperaturwand verringert ihre Steigung mit der geringeren Rate des Heliumbrennens, nach Gleichung (35)

wandert sie damit langsamer in Richtung des Zentrums als während des Flash.

Bei Modell 1366 überschreitet x den kritischen Wert, die Schalenquelle ist zu dünn geworden, und damit setzt die Instabilität ein. Die Temperatur im Maximum nimmt wieder zu, wenn auch zunächst noch langsam (siehe Tabelle 3). Die nun folgende Entwicklung ist dem Flash sehr ähnlich. Der Temperaturanstieg beschleunigt sich, der Temperaturgradient oberhalb des Temperaturmaximums wächst so lange, bis er den adiabatischen Gradienten erreicht und so zu Konvektion führt (Modell 1404). Mit der nach außen wachsenden Konvektionszone kommt es zu stärkerer Expansion, bis schließlich die durch das Heliumbrennen pro Zeiteinheit produzierte Energie wieder abnimmt (ab Modell 1452). Die Temperatur in der Heliumschalenquelle durchläuft ein Maximum bei Modell 1471. Die Konvektionszone erreicht ihre größte Ausdehnung in der Massenskala bei Modell 1512 (siehe Abbildung 10), schrumpft wieder und ist bei Modell 1542 verschwunden. Durch die Expansion während der Instabilität ist x wieder unter den kritischen Wert von 0.63 gefallen. Mit abnehmender Energieproduktion kommt es zu einer neuen Kontraktionsphase der Schalenquelle, x nimmt wieder zu und eine neue Instabilität wird ausgelöst. Ab Modell 1584 beginnt die Maximaltemperatur wieder anzusteigen, der beschriebene Vorgang wiederholt sich.

Das Auftreten solcher "thermischer Pulse" in wiederholter Folge und ihr Ablauf wurden bereits bei WEIGERT (1965, 1966)

für einen Stern von fünf Sonnenmassen und bei ROSE (1960) für einen reinen Heliumstern beschrieben. Der Unterschied zu den hier untersuchten Pulsen liegt in dem Aufbau der Schalenquelle begründet. Sie ist im vorliegenden Fall nicht durch Brennstoffmangel nach innen begrenzt, sondern durch den während des Flash erzeugten und durch das Heliumbrennen aufrechterhaltenen steilen Temperaturabfall zum Zentrum hin. Infolgedessen brennt die Schalenquelle nicht nach außen, sondern nach innen mit einer durch die Steilheit des Temperaturabfalls gegebenen Geschwindigkeit. Aus Abbildung 10 und Tabelle 4 lassen sich einige Veränderungen von einem Puls zum nächsten ablesen. Insgesamt wurden fast vier Pulse vollständig durchgerechnet. Man sieht, daß die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen wächst. Die Masse des entarteten Kerns nimmt von Puls zu Puls ab, damit dürfte nach einer genügend großen Zahl von Pulsen der Stern sich dem zentralen Heliumbrennen nähern. Teilt man die Masse des Kerns durch die durchschnittliche Massenverschiebung der Schalenquelle pro Puls ($\delta M_r/M = 0.008$), so ergeben sich über 30 Pulse. Während dieser Zeit würde zwar auch der Heliumgehalt im Kern sinken, aber aus den bisherigen Pulsen extrapoliert nur um 10% bis 15%. Immerhin ist der Rechenaufwand für einen Puls so erheblich, daß die Rechnung nicht weitergeführt wurde. Es sei hier daran erinnert, daß die weitere Entwicklung von der Annahme der völligen Durchmischung des Kerns beeinflußt wird. Diese Annahme bedarf aber noch einer ausführlichen Untersuchung.

5. Ergänzungen

5.1 Wiederholungsrechnungen

Die hier benutzten Energieverlustraten für Plasmaneutrinos sind um einen Faktor 4 zu groß. Wie beeinflußt eine entsprechende Korrektur die Entwicklung des Helium-Flash? Im Prinzip läßt sich diese Frage nur durch eine Wiederholung der Rechnung entscheiden. Das bedeutet einen relativ großen Rechenaufwand, eine teilweise Antwort ergibt sich aber bereits, wenn man den Teil der Rechnung vom Einsetzen der Neutrinoverluste bis zum Zünden des Heliums wiederholt. Die Unterschiede gegenüber der ursprünglichen Rechnung sind in Tabelle 5 zusammengestellt, in die auch noch die Resultate einer Rechnung ohne Neutrinos aufgenommen wurden. Der wichtigste Effekt der Neutrinoproduktion ist die Ausbildung eines positiven Temperaturgradienten in Zentrumsnähe. Daß dieser Effekt nur durch die Neutrinos zustande kommt, zeigt die Vergleichsrechnung ohne Neutrinos. Hier liegt das Temperaturmaximum beim Zünden des Heliums im Zentrum des Sterns, infolge der Entartung ist der Temperaturgradient zwar klein, aber nirgends positiv. Aus Tabelle 5 läßt sich außerdem ablesen, daß die Neutrinos die Entwicklung des Kerns verlangsamen. Die drei ausgewählten Modelle sind vergleichbar in ihrer maximalen Energieerzeugung durch den 3α-Prozeß ($\varepsilon_{He} = 6.5 \cdot 10^2$ erg g^{-1} sec^{-1}). Durch die Neutrinos hat der Stern beim Zünden des Heliums einen in Masse größeren Kern, damit auch eine höhere Leuchtkraft, und ist etwas älter. Das ist verständlich, da ein Teil der im Kern freiwerdenden

Kontraktionsenergie durch die Neutrinos verloren geht, statt die Temperatur des Kerns weiter zu erhöhen. Der Kern braucht also länger, um die Temperatur des Heliumbrennens zu erreichen, die Schalenquelle brennt in dieser Zeit weiter nach außen. Dazu kommt, daß im Falle des in Zentrumsnähe positiven Temperaturgradienten die Dichte im Gebiet des Heliumbrennens geringer ist, eine vergleichbare Energieerzeugungsrate also erst bei entsprechend höherer Temperatur erreicht wird, wie aus Tabelle 5 hervorgeht. Das zum Vergleich angegebene Modell von Härm und Schwarzschild hat schon eine etwas höhere Energieerzeugung durch das Heliumbrennen, aber die Lage der chemischen Diskontinuität und der Ort im Hertzsprung-Russell-Diagramm sind sicher vergleichbar, da die Entwicklung im Flash-Gebiet schon wesentlich rascher abläuft als das Brennen in der Wasserstoffschalenquelle. Für die Unterschiede zu den Resultaten von Härm und Schwarzschild kann die unterschiedliche Methode beim Verschieben der Wasserstoffschalenquelle verantwortlich sein.

5.2 Vernachlässigungen

Für die Rechnungen wurden folgende Annahmen gemacht:

a) die Konvektion im Heliumkern ist adiabatisch und momentan adjustiert,

b) das Trägheitsglied ist vernachlässigbar,

c) der Stern bleibt während der ganzen Entwicklung kugelsymmetrisch aufgebaut.

Nach den Ansätzen der Mischungswegtheorie gilt für nahezu adiabatische Konvektion

$$\nabla - \nabla_{ad} \approx \left(\frac{L_r \nabla_{ad}}{\pi r^2 P \sqrt{g H_p}} \right)^{2/3} \qquad (44)$$

mit $g \cdot H_p = P/\varrho$. Im Höhepunkt des Flash (Modell 1035) erreicht L_r/L im Maximum den Wert $3 \cdot 10^7$. Dort ergibt sich

$$\nabla - \nabla_{ad} \approx 6 \cdot 10^{-3}.$$

Das rechtfertigt die Annahme der Adiabasie. Bei diesem Modell wächst die Konvektionszone mit einer (aus den Rechnungen entnommenen) Geschwindigkeit von $1.5 \cdot 10^3$ cm sec^{-1}. Wie groß ist dort im Mittel die Konvektionsgeschwindigkeit der aufsteigenden Elemente? Für diese gilt nach der Mischungswegtheorie näherungsweise

$$v_k \approx \left[\frac{1}{8} g H_p \delta (\nabla - \nabla_{ad}) \right]^{1/2} \qquad (45)$$

mit $\delta = - (d \log \varrho / d \log T)_p$. Die Geschwindigkeit eines Konvektionselementes am äußeren Rand der Konvektionszone wird näherungsweise durch die Verhältnisse bestimmt sein, die eine halbe Skalenhöhe des Druckes weiter innen vorliegen. Dort ergibt sich für Modell 1035:

$$\nabla - \nabla_{ad} \approx 3 \cdot 10^{-3}, \quad v_k \approx 7 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Damit ist aber die Konvektionsgeschwindigkeit sehr viel größer als die Wachstumsgeschwindigkeit der Konvektionszone, die Konvektion wird sich praktisch sofort adjustieren.

Das Trägheitsglied ist vernachlässigbar, wenn überall im Stern gilt

$$\left| \frac{\ddot{r}}{g} \right| = \left| \frac{\ddot{r} r^2}{G M_r} \right| \ll 1.$$

Die Größe

$$D = \left| \frac{\ddot{r}\, r^2}{G M_r} \right|$$

wurde für verschiedene Massenschalen und Zeitpunkte der Entwicklung aus den erhaltenen Modellen abgeschätzt. Im Höhepunkt des Flash treten die größten $\ddot{r}$-Glieder am oberen Rand des Heliumkerns auf. Aus den Abschätzungen ergab sich in diesem Gebiet für D eine obere Grenze von 10^{-7}. r^2/M_r ist an der Oberfläche am größten, dort ändert sich aber der Radius erst einige Jahre nach dem Höhepunkt des Flash, also mit wesentlich langsamerer Zeitskala. Dabei blieb D stets unter 10^{-5}. Das Trägheitsglied ist also während der ganzen Phase des Helium-Flash vernachlässigbar.

Dagegen ist zu fragen, ob für den Helium-Flash die Annahme sphärischer Symmetrie noch gerechtfertigt ist. Da das Helium im vorliegenden Fall in einer Schale um das Zentrum gezündet wird, kann der Flash bei kleinen Störungen an unterschiedlichen Punkten der Schale zu etwas verschiedenen Zeitpunkten einsetzen. Das könnte zu Abweichungen von der Kugelsymmetrie führen, wie von EGGLETON (1966) vermutet wurde. Das benutzte Programm liefert nur kugelsymmetrische Lösungen und es sollte deshalb untersucht werden, ob nichtkugelsymmetrische Störungen dieser Lösungen so rasch anwachsen, daß sie zu einer Abweichung von der kugelsymmetrischen Entwicklung führen können. Mögliche Einflüsse der Rotation werden in den Rechnungen ebenfalls vernachlässigt.

Für die Anregung der Arbeit und viele Ratschläge bei ihrer Durchführung danke ich Herrn Prof. Kippenhahn. Herrn Prof. Biermann danke ich für die Erlaubnis, die Arbeit an seinem Institut durchführen zu können und für die Bereitstellung der dazu notwendigen Mittel. Mein Dank gilt außerdem für anregende Diskussionen Herrn Dr. Weigert sowie Frl. Dr. Hofmeister und Herrn von Sengbusch. Den Mitarbeitern des Instituts für Plasmaphysik, München danke ich für ihre Unterstützung bei der Ausführung der notwendigen Rechnungen auf der dortigen IBM 7090.

Anhang A

Gebiete, in denen sich abhängige Variable räumlich stark ändern und die sich längs der Massenskala verschieben, erzwingen kurze Zeitschritte. Will man den Zeitschritt vergrößern, so werden die benutzten Differenzengleichungen für die zeitlichen Änderungen (Energiesatz, Elementumwandlung) unbrauchbar. Dieses Problem taucht auf bei dünnen Schalenquellen und es sind inzwischen von mehreren Autoren (HÄRM und SCHWARZSCHILD [1966], WEIGERT [1966]) Verfahren publiziert worden, mit denen man hier weiterkommt. Die in der vorliegenden Arbeit benutzte Methode ähnelt der von Härm und Schwarzschild. Sie beruht auf folgendem: da alle Veränderungen außerhalb der Schalenquelle wesentlich langsamer ablaufen, als in ihr selbst, kann man versuchen, die gesamte Schalenquelle mit ungeändertem Profil zu verschieben. Dabei muß man unterscheiden zwischen dem Verschieben des X-Profils, also einer Integration der Gleichungen für die Änderungen der Elementhäufigkeiten, und dem Verschieben der Werte der abhängigen Variablen P, T, r und L_r im Gebiet der Schalenquelle. Das erste muß möglichst genau erfolgen, da das Verfahren hier die Lösung der Differentialgleichungen für die Umwandlung von Wasserstoff in Helium ersetzt. Für die Zeitableitungen im Energiesatz (Gleichung (1)) ist damit noch nichts gewonnen. Nimmt man aber für den Verlauf von Druck und Temperatur ebenfalls an, daß das Profil sich praktisch ungeändert verschiebt, so lassen sich die Differentialquotienten in Gleichung (1) darstellen durch

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial M_r} \cdot \frac{\Delta M_r}{\Delta t} \,, \qquad (46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial M_r} \cdot \frac{\Delta M_r}{\Delta t} \,, \qquad (47)$$

wobei ΔM_r die zum Zeitschritt Δt gehörige Profilverschiebung ist. Diese beiden Gleichungen ersetzen die Bildung der Zeitableitungen von Druck und Temperatur aus den Differenzen zum vorhergehenden Modell für den gleichen M_r-Wert. Die Profile der abhängigen Variablen P, T, r und L_r werden verschoben, um ein besseres Näherungsmodell für das Iterationsverfahren zu erhalten. Im einzelnen geht das folgendermaßen vor sich: zunächst werden einige Modelle (in der Regel fünf) unter Benutzung der üblichen Differenzengleichungen mit einem Zeitschritt gerechnet, der so klein ist, daß X im Maximum der Schalenquelle sich um weniger als 30% ändert. Das Zeitintervall τ zwischen dem ersten und dem letzten dieser Modelle ergibt, mit einem Faktor f (zwischen 5 und 30) multipliziert, den nun folgenden großen Zeitschritt. Im Zeitintervall τ sei der Mittelpunkt der Schalenquelle, definiert durch die Bedingung $X = 0.5 \cdot X_{max}$, in der Massenskala um δM_r nach außen gewandert. Dann erhält man durch Multiplikation von δM_r mit dem Faktor f die zu dem großen Zeitschritt gehörige Massendifferenz ΔM_r, um die das X-Profil über die Massenskala parallel zu verschieben ist. Es folgen wieder einige Modelle mit kleinem Zeitschritt, damit sich das Profil der Schalenquelle

neu einstellen kann und man Ausgangswerte für den nächsten großen Zeitschritt erhält.

Um die Fehler des Verfahrens zu ermitteln, wurde für einen Zyklus (Modelle 265 bis 270) die gleiche Phase nur mit kleinen Zeitschritten wiederholt, die vorher in vier kleinen und einem großen Zeitschritt (Faktor 10) gerechnet worden war. Das Resultat ist in Abbildung 12 und Tabelle 6 dargestellt. Die X-Profile in beiden Rechnungen stimmen gut überein. Für die tatsächliche Rechnung ergibt sich zwischen Modell 265 und Modell 270 ein um 10% größeres Zeitintervall als für die Wiederholungsrechnung ohne Verschieben, für die Unterschiede in der Temperaturänderung im Zentrum läßt sich wegen der geringen Größe der Änderung nur eine obere Schranke von 5% ablesen. Die Fehler dürften stets in die gleiche Richtung gehen, was bedeutet, daß die Zeitdauer dieser Phase und damit die Größe des Heliumkerns beim Zünden des Heliums um 5% bis 10% zu groß berechnet sein können.

Anhang B

Im Anhang zu KTW V wird mit Hilfe der linearisierten Sternaufbaugleichungen das Verhalten der Zentralkugel gegenüber Temperaturstörungen untersucht. Bei der Übertragung auf eine Schalenquelle ändert sich nur die linearisierte Form der Kontinuitätsgleichung, und zwar steht statt

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -3\,\frac{r_1}{r_0} \tag{48}$$

die Gleichung

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{3}{1-x^3}\,\frac{r_1}{r_0}\,, \tag{49}$$

wenn man annimmt, daß sich der Radius des Heliumkerns durch die Störung nicht ändert ($r_{i1} = 0$). Der Index 0 kennzeichnet die ungestörten Größen, der Index 1 die Störungen. x ist das Verhältnis der ungestörten Radien am inneren und äußeren Rand der Schalenquelle, also $x = r_{i0}/r_{a0}$. Die Zentralkugel ist also als Grenzfall $x = 0$ mit enthalten. Für eine sehr dünne Schalenquelle hat x nahezu den Wert 1. Für die Größe A gilt unter Berücksichtigung von Gleichung (49)

$$A = \frac{\nu\,\varepsilon_0}{c_{p0}\,T_0\left(1 - \nabla_{ad0}\,\dfrac{4\,\delta_0}{4\alpha_0 - \dfrac{3f}{1-x^3}}\right)} \tag{50}$$

mit $\nu = (d \log \varepsilon / d \log T)_\rho$. Die Frage, ob eine Temperaturstörung abklingt oder anwächst, wird durch das Vorzeichen von A entschieden. $A < 0$ bedeutet Stabilität, $A > 0$ Instabilität. Beim idealen Gas ist $\delta_0 = \alpha_0 = 1$ und $\nabla_{ad0} = 0.4$.

Nimmt man außerdem noch homologe Kontraktion an (f = 1), so ergibt sich für die das Vorzeichen von A bestimmende Klammer in Gleichung (50)

$$(\ldots\ldots) = -\frac{3}{5}\,\frac{1+4x^3}{1-4x^3} \tag{51}$$

und damit die Bedingung für Stabilität der Schale:

$$A < 0 \quad \text{für} \quad x < 0.63. \tag{52}$$

Rechnet man dies um auf das Verhältnis von Dicke der Schale zu ihrem mittleren Radius, so ergibt sich die Bedingung für Stabilität zu

$$A < 0 \quad \text{für} \quad \frac{\Delta r}{r} > 0.45. \tag{53}$$

Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis der detaillierten Untersuchung von SCHWARZSCHILD und HÄRM (1965) über Instabilität einer Schalenquelle, die als Grenzwert $\Delta r/r = 0.42$ erhalten. In Gleichung (50) ist nicht berücksichtigt, daß durch die Störung ein größerer Temperaturgradient entsteht, der zusätzlich Energie abtransportieren kann. Für hinreichend große Werte von ν (Modell 1365: $\nu \approx 29$) kann man diesen Effekt vernachlässigen.

Wird wie bei dem in dieser Arbeit beschriebenen Helium-Flash ein nukleares Brennen in einer Schale gezündet, die im entarteten Gebiet liegt, so ist wegen der Entartung $\delta_0 \ll 1$, der Wert in der Klammer liegt nahe bei +1. Für hinreichend starke Entartung gilt also, daß die auftretende Instabilität beim Zünden eines nuklearen Brennprozesses ihre Ursache in der Entartung hat unabhängig davon, ob das Brennen im Zentrum oder in einer Schale beginnt.

Literaturverzeichnis

Adams, J.B., M.A. Ruderman and C. Woo: Phys. Rev. 129, 1383 (1963)

Aller, L.H.: The Abundance of the Elements, New York Interscience Publishers, Inc. (1961)

Cox, A.N. and J.N. Stewart: Astrophys. J. Suppl. 94, Vol. XI (1965)

Eggleton, P.: Monthly Notices R.A.S. 132, 479 (1966)

Härm, R. and M. Schwarzschild: Astrophys. J. 139, 594 (1964)

Härm, R. and M. Schwarzschild: Astrophys. J. 145, 496 (1966)

Hofmeister, E., R. Kippenhahn und A. Weigert (zitiert als HKW I): Z. Astrophys. 59, 215 (1964)

Hofmeister, E.: Z. Astrophys. 65, 164 (1967)

Kippenhahn, R., H.-C. Thomas und A. Weigert (zitiert als KTW IV): Z. Astrophys. 61, 241 (1965)

Kippenhahn, R., H.-C. Thomas und A. Weigert (zitiert als KTW V): Z. Astrophys. 64, 373 (1966)

Mestel, L.: Monthly Notices R.A.S. 112, 598 (1952)

O'Dell, C.R., M. Peimbert and T.D. Kinman: Astrophys. J. 140, 119 (1964)

Reeves, H.: Stellar Energy Sources. In: Stars and Stellar Systems, Vol. VIII, p. 113. Chicago, London: University of Chicago Press 1965

Reeves, H.: Nuclear Energy Generation in Stars. In: Stellar Evolution, p. 83. New York: Plenum Press 1966

Rose, W.K.: Astrophys. J. 146, 838 (1966)

Salpeter, E.E.: Australian J. Phys. 7, 373 (1954)

Saslaw, W.C. and M. Schwarzschild: Astrophys. J. 142, 1468 (1965)

Schwarzschild, M.: Structure and Evolution of the Stars. Princeton, N.J.: Princeton University Press 1958

Schwarzschild, M. and R. Härm: Astrophys. J. 136, 158 (1965)

Schwarzschild, M. and R. Härm: Astrophys. J. 142, 855 (1965)

Searle, L. and A.W. Rodgers: Astrophys. J. 143, 809 (1966)

Sugimoto, D.: Prog. Theor. Phys. 32, 703 (1964)

Thomas, H.-C.: Mitt. Astr. Ges. 19, 93 (1965)

Thomas, H.-C.: Mitt. Astr. Ges. 21, 103 (1966)

Traving, G.: Astrophys. J. 135, 439 (1962)

Weigert, A.: Mitt. Astr. Ges. 19, 61 (1965)

Weigert, A.: Z. Astrophys. 64, 395 (1966)

Zaidi, M.: Nuovo Cimento 40A, 502 (1965)

Tabelle 1

Koordinaten im Hertzsprung-Russell-Diagramm und Alter (in 10^9 Jahren) einiger Modelle. Über die Bedeutung der Buchstaben A, B, C und D siehe Abbildung 1.

Modell	Alter/10^9a	log $L/L_\odot$	log T_e	
1	0	0.282	3.830	A
2	0.25000	0.292	3.831	
3	0.74998	0.314	3.833	
4	1.45601	0.342	3.835	
5	1.73797	0.355	3.836	
6	2.00153	0.368	3.837	
7	2.24876	0.381	3.838	B
8	2.44328	0.391	3.839	
9	2.62834	0.401	3.840	
10	2.80552	0.411	3.840	
12	3.14259	0.431	3.842	
14	3.47267	0.455	3.843	
16	3.80529	0.478	3.844	
18	4.13988	0.502	3.846	
20	4.47584	0.529	3.847	
25	5.23927	0.598	3.850	
30	5.68511	0.645	3.850	
40	6.22633	0.714	3.848	
50	6.43115	0.747	3.845	
57	6.57050	0.772	3.840	C
60	6.64321	0.786	3.837	
70	6.88558	0.841	3.815	
79	7.10371	0.847	3.738	D
90	7.17773	0.947	3.719	
100	7.21177	1.029	3.714	

Fortsetzung von Tabelle 1

Modell	Alter/10^9a	log $L/L_\odot$	log T_e
120	7.25680	1.157	3.709
140	7.28645	1.253	3.705
160	7.33289	1.441	3.700
180	7.36624	1.623	3.693
200	7.39017	1.807	3.685
226	7.40891	1.981	3.678
242	7.41582	1.868	3.684
250	7.42266	1.923	3.681
300	7.44721	2.254	3.666
350	7.45669	2.471	3.655
400	7.46335	2.704	3.642
450	7.46773	2.933	3.628
500	7.47060	3.150	3.618
550	7.47225	3.313	3.604
600	7.47301	3.401	3.601
650	7.47364	3.483	3.598
699	7.47405	3.535	3.597
762	7.47410	3.540	3.597
1035	7.47410	3.538	3.597
1278	7.47410	3.536	3.597
1365	7.47410	2.593	3.654
1562	7.47410	3.282	3.609
1583	7.47410	3.123	3.620
1600	7.47410	3.301	3.606
1773	7.47410	3.057	3.622
1800	7.47410	3.281	3.608
1955	7.47411	3.009	3.625

Tabelle 2: Ausgewählte Modelle während des Flash: Spalte 2 in der oberen Hälfte der Tabelle gibt die Zuordnung zu den Abbildungen 7 und 8. Nullpunkt für die Alterszählung ist Modell 1035. Δt ist der Zeitschritt zwischen dem betreffenden Modell und dem vorhergehenden Modell, τ_{fl} die nach Gleichung (30) abgeschätzte Zeitskala der Entwicklung während des Flash, Ψ_{konv} der Wert des Entartungsparameters in der inneren Konvektionszone. Weitere Spalten geben die Höhe des Temperaturmaximums, die maximale Energieerzeugung durch das Heliumbrennen (in cgs-Einheiten: erg g^{-1} sec^{-1}), die Höhe des Leuchtkraftmaximums und -minimums.

Tabelle 2

Modell	Kurve	Alter/a	Konvektion von M_r/M =	Konvektion bis M_r/M =	Ψ_{konv}
699	1	$-5.17 \cdot 10^4$	-	-	-
762	1a	$-1.64 \cdot 10^2$	.3008	.3066	7.6
832	2	-.111	.2926	.3723	5.3
919	3	-.002 79	.2924	.3987	3.7
970	4	-.000 361	.2924	.4156	2.5
1015	5	-.000 100	.2924	.4241	1.4
1035	6	0.	.2924	.4280	0.5
1060	7	.000 125	.2924	.4305	-0.25
1087	8	.000 361	.2924	.4319	-0.85
1122	9	.001 49	.2924	.4330	-1.55
1157	10	.008 87	.2924	.4336	-2.25
1200	11	.098 8	.2923	.4340	-2.85
1278	12	2.54	.2920	.4341	-3.5

Modell	$\log_{10}$ von Δt/sec	$\frac{\tau_{fl}}{sec}$	$T_{max}/^oK$	$\frac{\varepsilon_{He,max}}{cgs}$	$(\frac{L_r}{L})_{max}$	$-(\frac{L_r}{L})_{min}$
699	11.43	14	7.953	1.98	-	-
762	8.52	11	8.024	5.02	-	-
832	5.81	8	8.160	9.24	3.16	0.55
919	3.40	6	8.254	11.23	5.25	1.74
970	2.50	5	8.341	12.64	6.60	2.74
1015	2.20	4	8.402	13.24	7.32	3.19
1035	2.20	4	8.443	13.43	7.49	3.43
1060	2.20	4	8.470	13.32	7.33	3.51
1087	2.80	4	8.479	12.99	6.95	3.43
1122	3.10	5	8.475	12.38	6.22	3.18
1157	4.31	6	8.454	11.60	5.29	2.80
1200	5.21	7	8.420	10.57	4.06	2.24
1278	6.41	8	8.368	9.19	2.43	1.48

Tabelle 3

Ausgewählte Modelle nach dem Flash: Nullpunkt für die Alterszählung ist Modell 1035. In den mittleren Spalten werden beim Vorhandensein von Konvektion im Heliumkern die Grenzen der Konvektionszone angegeben, andernfalls die Grenzen der Heliumschalenquelle im Logarithmus des Radius (in cm), festgelegt durch $\varepsilon_{He} = 10^2$ erg g^{-1} sec^{-1}) und das Radienverhältnis $x = r_i/r_a$. Es folgt die Höhe des Temperaturmaximums im betreffenden Modell und die Angabe, ob dieses Maximum zeitlich gesehen gerade einen Extremalwert hat.

Modell	Alter/a	Konvektion von M_r/M = log r_a	Konvektion bis M_r/M = log r_i	Konvektion bis M_r/M = x	log T_{max}	Extremum?
1339	58	9.34	9.035	0.50	8.2971	-
1355	432	9.29	9.032	0.55	8.1864	-
1363	1442	9.22	9.025	0.63	8.1412	-
1366	1947	9.21	9.015	0.64	8.1367	Minimum
1376	3126	9.20	9.006	0.65	8.1498	-
1404	3471	.2895	.2935		8.2195	-
1471	3506	.2859	.3118		8.3103	Maximum
1512	3561	.2847	.3183		8.2863	-
1542	3827	9.31	9.032	0.52	8.1959	-
1584	5658	9.19	9.013	0.66	8.1276	Minimum
1676	7921	.2782	.3071		8.3057	Maximum
1776	10871	9.19	9.008	0.66	8.1205	Minimum
1858	13066	.2698	.3016		8.3014	Maximum
1957	16111	9.19	9.016	0.66	8.1132	Minimum
2052	19507	.2613	.2970		8.2971	Maximum

Tabelle 4

Ausgewählte Modelle im Höhepunkt der Pulse: in den angegebenen Modellen hat die nukleare Energieerzeugung (Heliumbrennen) im (räumlichen) Maximum ein zeitliches Maximum erreicht. Das Alter ist von Modell 1035 aus gezählt. Spalte 5 gibt die Kohlenstoffhäufigkeit X_C im Gebiet innerhalb der Schalenquelle unter der Annahme völliger Durchmischung dieses Gebietes.

Modell	Alter/a	Konvektion von M_r/M =	Konvektion bis M_r/M =	X_C	log T_{max}	$\frac{\varepsilon_{He,max}}{cgs}$
1451	3499	.286	.308	.0283	8.3064	$2.97 \cdot 10^8$
1655	7913	.278	.302	.0316	8.3010	$2.79 \cdot 10^8$
1840	13033	.271	.295	.0351	8.2942	$2.60 \cdot 10^8$
2028	19495	.262	.289	.0389	8.2902	$2.44 \cdot 10^8$

Tabelle 5

Vergleich der Resultate verschiedener Entwicklungsrechnungen mit und ohne Neutrinoverluste. Nullpunkt der Alterszählung ist das homogene Hauptreihenmodell. Die Modelle der ersten drei Zeilen haben alle eine maximale Energieerzeugung durch das Heliumbrennen von $6.5 \cdot 10^2$ erg g^{-1} sec^{-1}. In der vierten Zeile stehen Ergebnisse der Rechnungen von Härm und Schwarzschild für ein Sternmodell gleicher Masse und chemischer Zusammensetzung.

Modell	Neutrinos	Alter/10^9a	$X=X_{max}/2$ bei M_r/M =	log T_{max}
564	ohne	7.47109	.3783	7.9396
692	korr.	7.47223	.4083	7.9507
727	zu groß	7.47409	.4341	7.9691
HS	ohne	-	.4575	7.9951

Modell	log ϱ bei $T=T_{max}$	$T=T_{max}$ bei M_r/M =	ψ bei $T=T_{max}$	log $L/L_\odot$
564	6.0515	0	20.3	3.204
692	5.8418	.1103	14.9	3.388
727	5.460	.3118	8.2	3.539
HS	6.0517	0	18.0	4.062

Tabelle 6

Vergleich der Methode des Verschiebens (siehe Anhang B) mit der üblichen Rechenmethode: von Modell 265 bis Modell 269 wird mit kleinen Zeitschritten gerechnet, von Modell 269 nach Modell 270 mit einem großen Zeitschritt. Eine Wiederholung der Rechnung ab Modell 269 mit kleinen Zeitschritten führt zu den Vergleichsmodellen 328 und 332. Der Ort der Schalenquelle wird dabei durch die Bedingung $X = \frac{1}{2} X_{max}$ definiert. In den Spalten 4 und 5 stehen Zentrumswerte.

Modell	Alter/10^9a	$X=X_{max}/2$ bei M_r/M =	log ϱ_c	log T_c
265	7.43160	0.25184	5.604	7.6629
269	7.43190	0.25212	-	-
270	7.43491	0.25488	5.619	7.6645
interpol.	7.43464	0.25488	5.6187	7.6645
328	7.43458	0.25481	5.6184	7.6644
332	7.43469	0.25494	5.6190	7.6645

Abbildung 1: Der Entwicklungsweg im Hertzsprung-Russell-Diagramm bis etwa 2000 Jahre nach dem Höhepunkt des Helium-Flash. Die großen Buchstaben kennzeichnen folgende markanten Punkte der Entwicklung: homogenes Hauptreihenmodell (A), Verschwinden des konvektiven Kerns (B), Wasserstoffgehalt ist im Zentrum auf Null abgesunken (C), die äußere Konvektionszone umfaßt 10% der Sternmasse (D). Die angeschriebenen Zahlen geben einige Modellnummern an. Die genauen Koordinaten und das zugehörige Alter für ausgewählte Modelle finden sich in Tabelle 1.

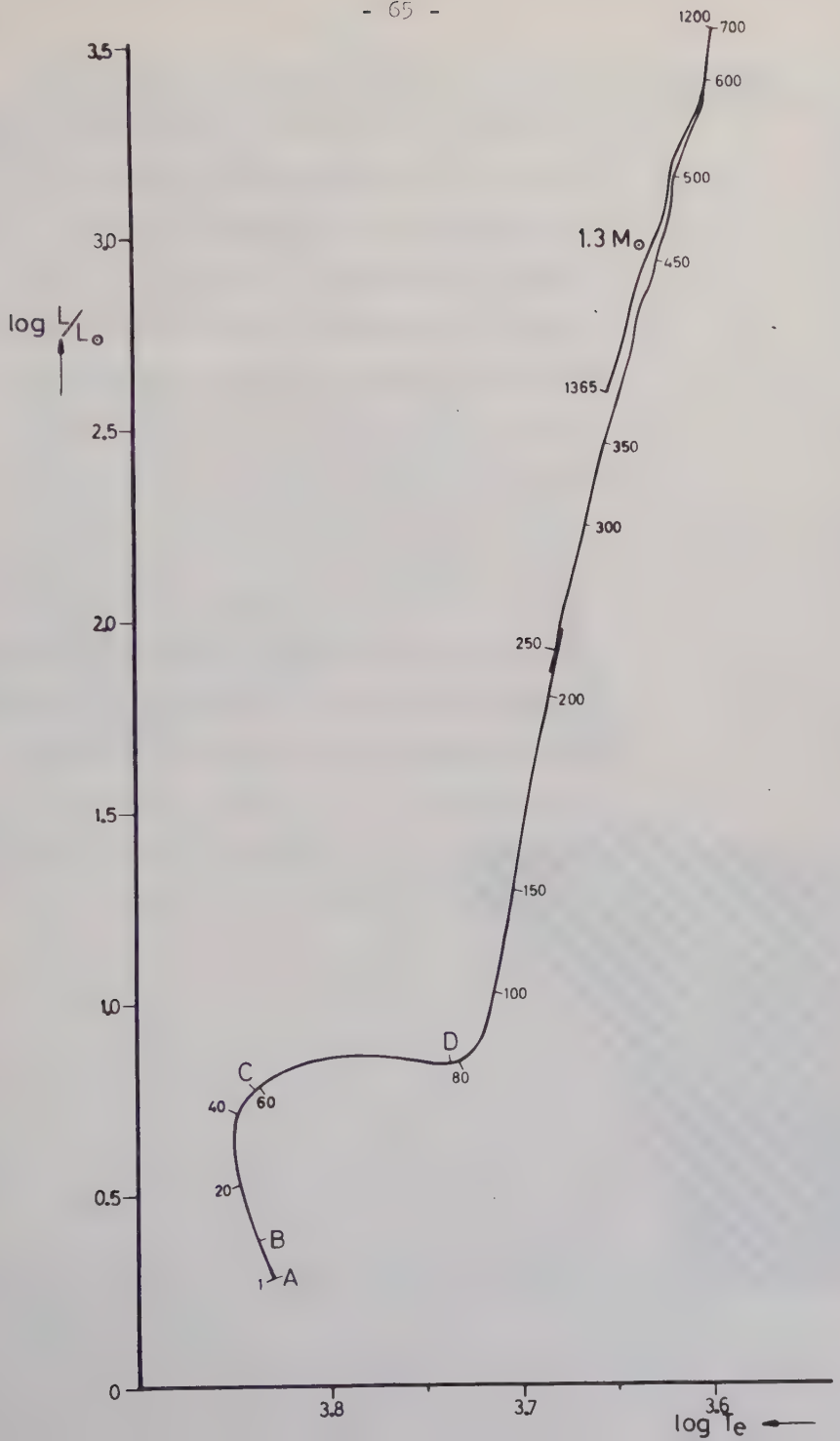

1200
700
600
500
1.3 M⊙
450
1365
350
300
250
200
150
100
D
80
C
60
40
20
B
1
A
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
log L/L⊙
3.8
3.7
3.6
log Te

Abbildung 2: Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: gezeichnet ist M_r/M über dem Alter des Sterns (Nullpunkt der Alterszählung: homogenes Hauptreihenmodell). Die Zeitskala wurde ab $7.2 \cdot 10^9$ Jahren um den Faktor 25 gestreckt und ab $7.46 \cdot 10^9$ Jahren noch einmal um den Faktor 10. Das Diagramm endet kurz vor dem Zünden des Heliums. Die großen Buchstaben haben die gleiche Bedeutung wie in Abbildung 1. Gebiete, in denen die durch das Wasserstoffbrennen erzeugte Energie pro Massen- und Zeiteinheit 10 erg g^{-1} sec^{-1} übersteigt, sind schraffiert. "Wolkige" Gebiete entsprechen Konvektionszonen. Punktiert sind Gebiete nach innen wachsenden Molekulargewichts (als Grenzen wurden die Stellen gewählt, bei denen sich die Wasserstoffhäufigkeit X um 0.01 von der Anfangschemie unterscheidet und wo X = 0.01 ist).

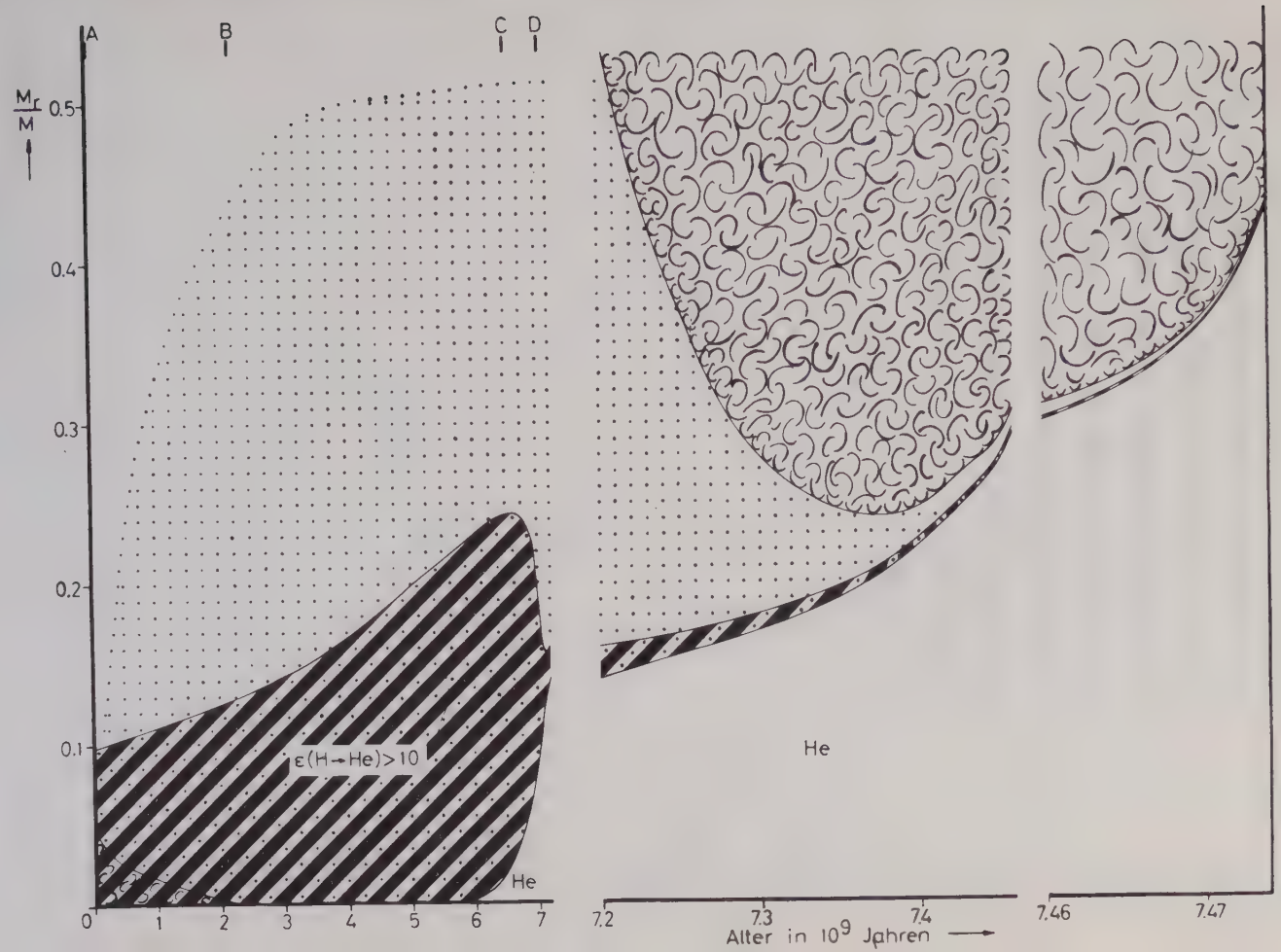

A
B
C
D
$\frac{M_r}{M}$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
ε(H→He)>10
He
He
0
1
2
3
4
5
6
7
7.2
7.3
7.4
7.46
7.47
Alter in 10^9 Jahren

Abbildung 3: Zentralwerte von Dichte und Temperatur während der Entwicklung. Die angeschriebenen Zahlen geben einige Modellnummern an. Die Werte von Dichte und Temperatur in der Massenschale $M_r/M = 0.311826$ während des Flash sind durch die gestrichelte Linie dargestellt. Zur Übersicht sind einige Linien ψ = const. (ψ Entartungsparameter, für Wasserstoffgehalt X = 0) eingezeichnet.

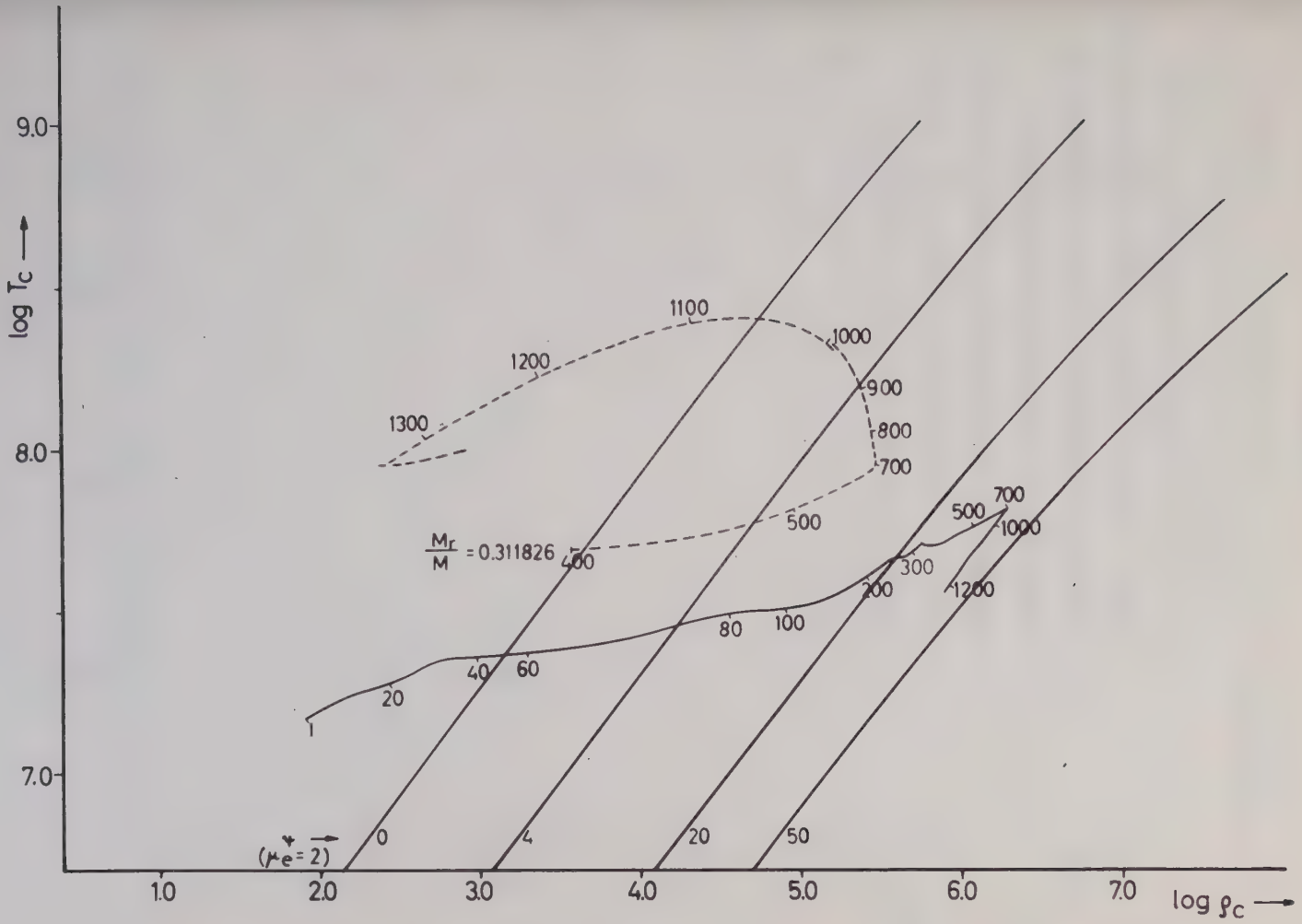

9.0
8.0
7.0
log T_c ⟶
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
log ρ_c ⟶
1100
1000
1200
900
1300
800
700
500
$\frac{M_r}{M}$ = 0.311826
400
700
500
1000
300
1200
200
100
80
60
40
20
1
0
4
20
50
(μ_e = 2)

Abbildung 4: Die Wasserstoffhäufigkeit X in Abhängigkeit von M_r/M für die Modelle 83 und 180. In Modell 83 reicht die Wasserstoffschalenquelle von $M_r/M = 0.128$ bis $M_r/M = 0.156$. Der Verlauf von X für $M_r/M > 0.156$ ist vor dem Ausbilden der Schalenquelle entstanden. Mit Modell 180 erreicht die Konvektionszone ihren tiefsten Punkt in der Massenskala und schafft eine Stufe in der Wasserstoffhäufigkeit. Die Wasserstoffschalenquelle liegt in Modell 180 bei $0.198 < M_r/M < 0.204$.

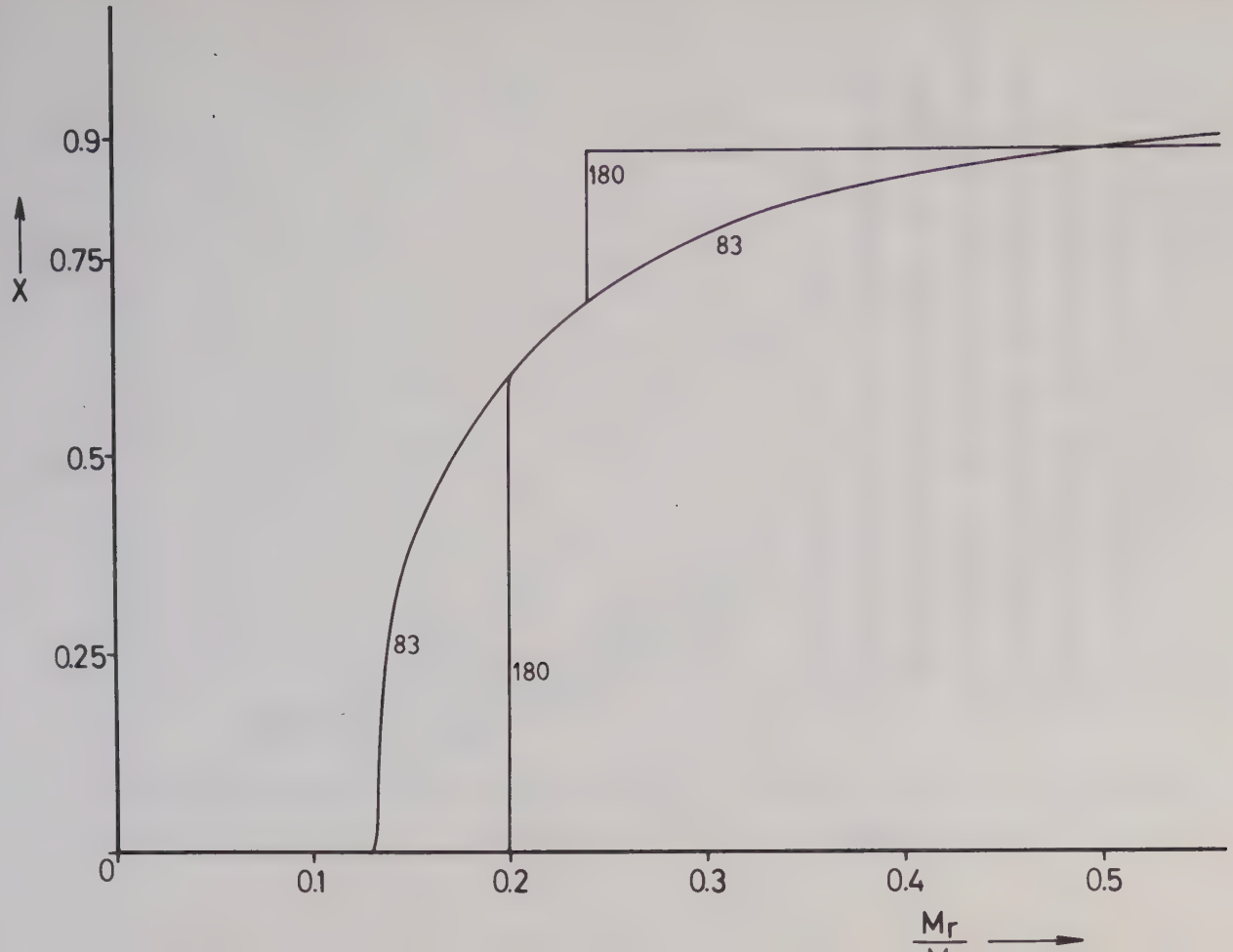

0.9
0.75
0.5
0.25
0
X
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
180
83
83
180
Mr

Abbildung 5: Linien konstanter Energieverluste ε_ν (in erg g^{-1} sec^{-1}) durch Produktion von Photo- und Plasmaneutrinos im Temperatur-Dichte-Diagramm. Die Kurven entsprechen den bei der Rechnung benutzten Formeln für die Neutrinoproduktion, berücksichtigen also nicht die nachträgliche Korrektur der Plasmaneutrinoraten um den Faktor 4. Der Entwicklungsweg des Zentrums bis zum Beginn des Helium-Flash ist eingezeichnet unter Angabe einiger Modellnummern.

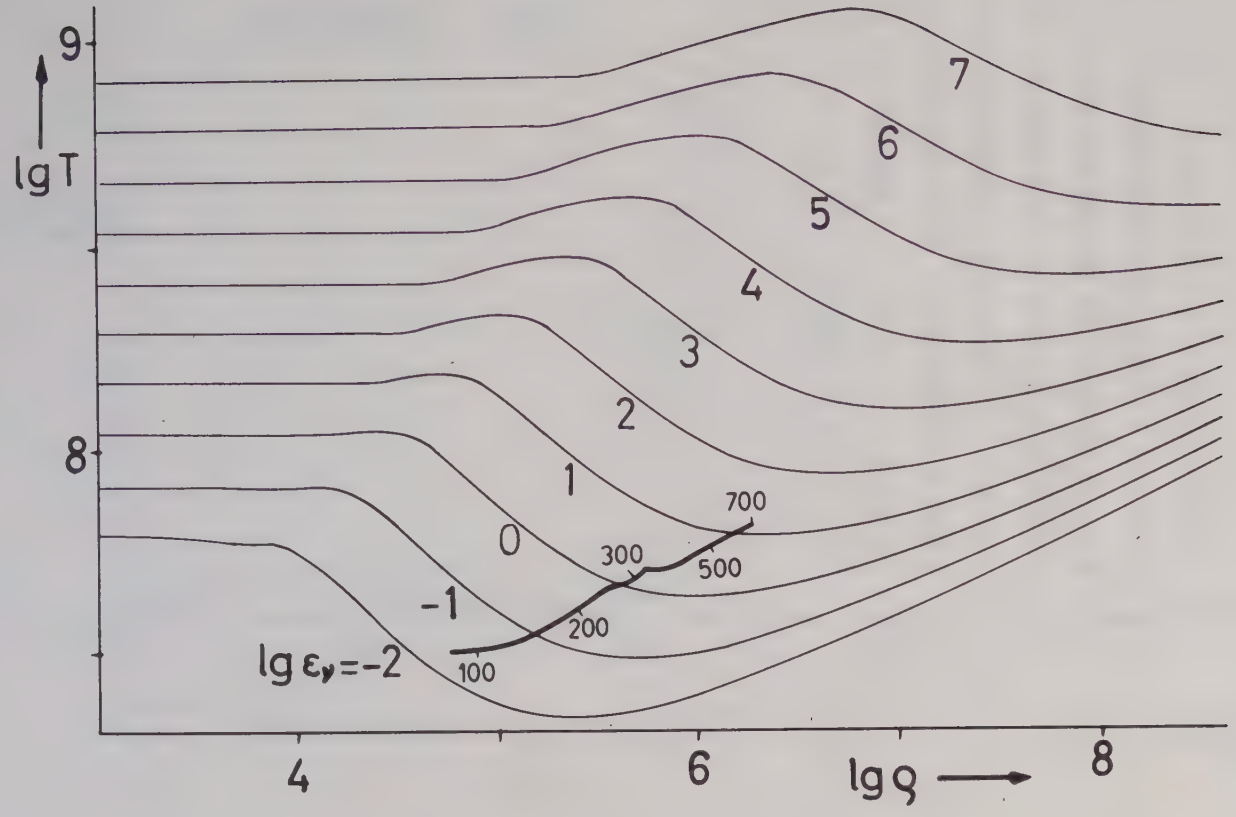

9
lg T
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
700
300
500
200
100
lg εγ=-2
4
6
lg ϱ
8

Abbildung 6: Nukleare Energieerzeugung durch das Heliumbrennen ε_n, Energieverluste durch Neutrinoproduktion ε_ν und aus den thermodynamischen Zustandsänderungen resultierender Energiegewinn ε_g (zusammengesetzt aus Änderung der inneren Energie und Volumenarbeit) im Heliumkern von Modell 699 in Abhängigkeit von M_r/M. Innerhalb von $M_r/M = 0.2$ überwiegen die Energieverluste durch Neutrinoproduktion, bei $M_r/M = 0.3$ liegt das Maximum des beginnenden Heliumbrennens (die Nebenmaxima kommen von der Reaktion $N^{14}(\alpha,\gamma)F^{18}$). Die produzierte nukleare Energie wird im wesentlichen durch Temperaturerhöhung verbraucht ($\varepsilon_g < 0$ im Gebiet des Heliumbrennens).

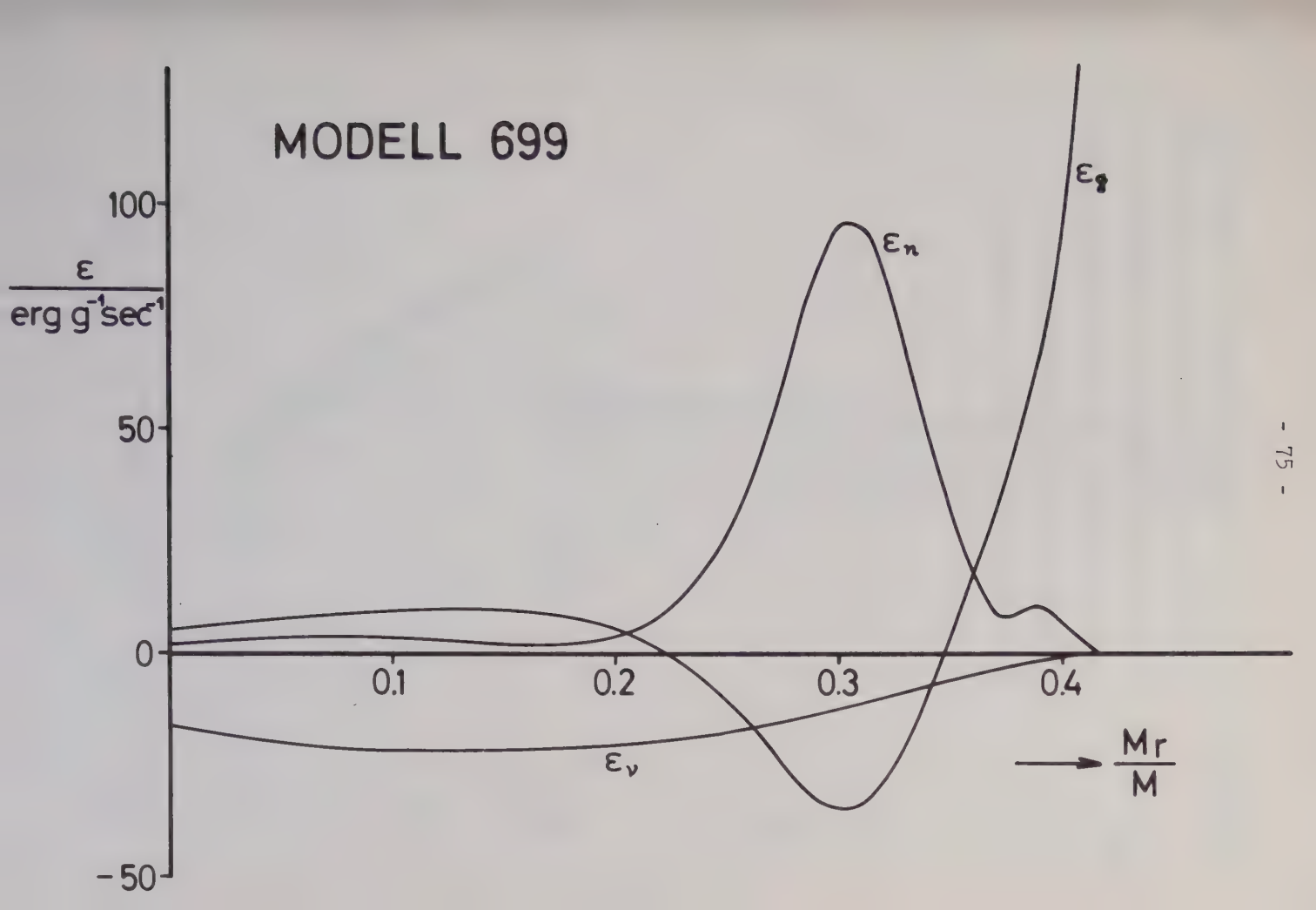

MODELL 699
100
50
0
-50
ε
erg g⁻¹sec⁻¹
0.1
0.2
0.3
0.4
εn
εg
εν
Mr
M

Abbildung 7: Die Temperatur im Heliumkern in Abhängigkeit von M_r/M für ausgewählte Modelle. Die Kurven beginnen am Innenrand der Schalenquelle und enden im Zentrum. Die angeschriebenen Nummern beziehen sich auf Tabelle 2, in der Modellnummer, Alter und einige charakteristische Werte dieser Modelle zusammengestellt sind. Der Übersichtlichkeit halber wurden nicht alle Kurven durch den gesamten Kern gezeichnet, es fehlen Teile der Kurven 7 bis 12 in dem Gebiet links vom Temperaturmaximum.

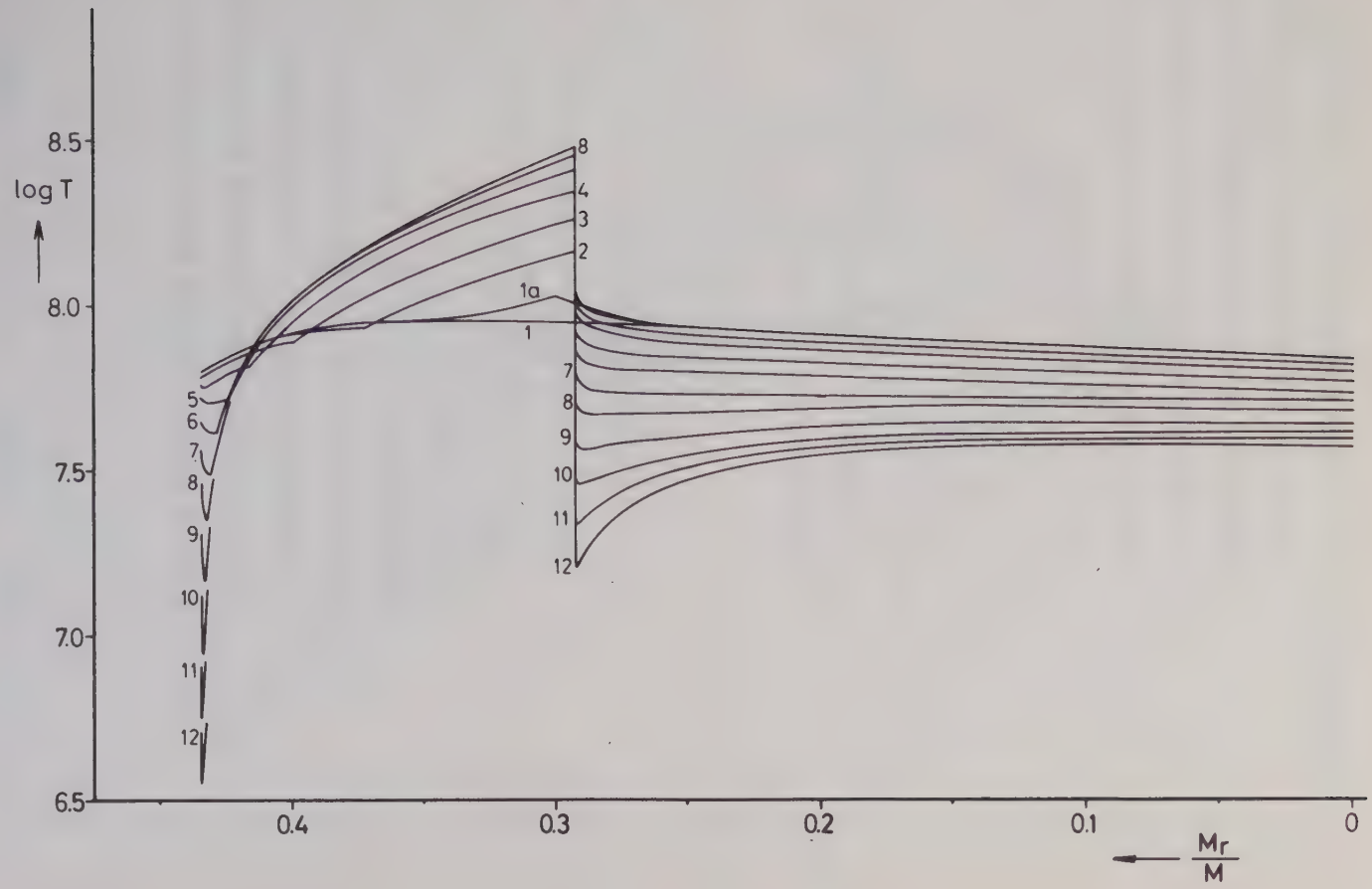

8.5
log T
8.0
7.5
7.0
6.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Mr/M
1a
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Abbildung 8: Der Verlauf von Temperatur und Dichte im Heliumkern für ausgewählte Modelle während des Flash. Die Kurven beginnen am Innenrand der Schalenquelle und enden im Zentrum. Die angeschriebenen Nummern beziehen sich auf Tabelle 2, in der Modellnummer, Alter und einige charakteristische Werte dieser Modelle zusammengestellt sind. Punktierte Linien geben die Änderungen von Temperatur und Dichte mit der Zeit für feste Massenschalen. Den kleinen Buchstaben sind dabei folgende Werte für M_r/M zugeordnet:

a	b	c	d	e
0.	0.28	0.38	0.4332	0.43433

Für die punktierten Linien c und d sind die Temperatur-Dichte-Werte durch größere Punkte hervorgehoben, wenn sie zu einem der ausgewählten Modelle gehören, für a, b und e ist diese Zuordnung eindeutig und deshalb keine Kennzeichnung nötig. Zur Übersicht sind einige Linien ψ = const. (ψ Entartungsparameter, für Wasserstoffgehalt X = 0) eingezeichnet. In der Konvektionszone verläuft die jeweilige Kurve parallel zu den Linien ψ = const.

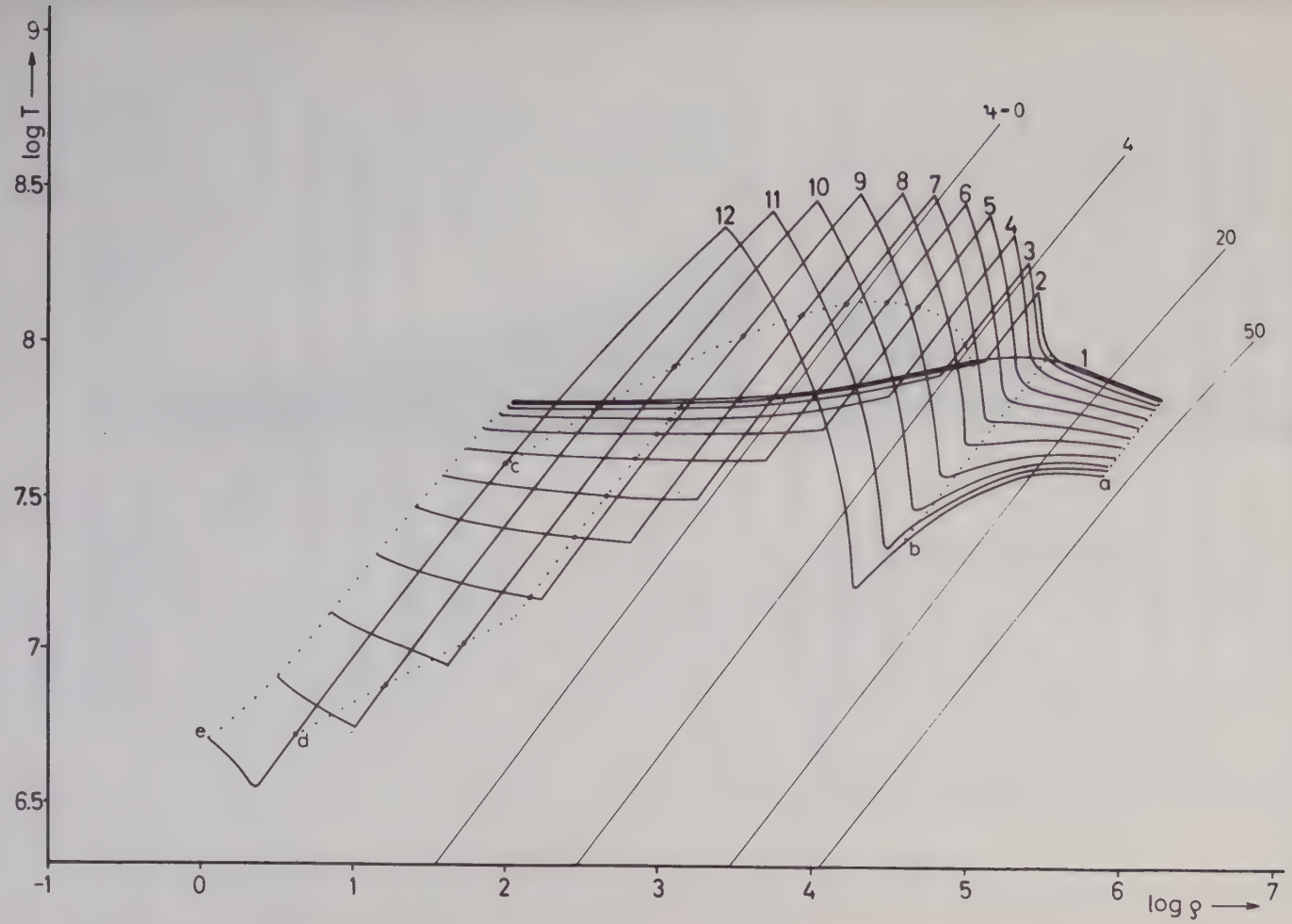

log T
log ρ
9
8.5
8
7.5
7
6.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
4-0
4
20
50
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
a
b
c
d
e

Abbildung 9: Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: die Zeichnung ist die Fortsetzung von Abbildung 2 durch die Phase des Helium-Flash. Die Massenskala ist die gleiche, die Zeitskala hat logarithmische Teilung und ist auf Modell 1035 als Nullpunkt bezogen. Das Alter von Modell 1035 relativ zum homogenen Hauptreihenmodell beträgt $7.474 \cdot 10^9$ Jahre. Die Wasserstoffschalenquelle ließ sich in dem gewählten Maßstab nur noch als (gestrichelte) Linie darstellen. Der nicht gezeichnete Teil der Rechnungen zwischen $t = -10^{-4}$ Jahren und $t = +10^{-4}$ Jahren enthält keine wesentliche Information, die obere Grenze für das Heliumbrennen ($\varepsilon_{He} > 10^3$ erg g^{-1} sec^{-1}) reicht in der Massenskala maximal bis $M_r/M = 0.398$ (bei Modell 1035).

Der Ausschnitt zeigt die Verhältnisse zwischen den beiden Konvektionszonen mit einer 1 : 40 vergrößerten Massenskala bei gleicher Zeitskala. Punktiert ist die Übergangsschicht zwischen wasserstoffreicher Hülle und Heliumkern (Festlegung der Grenzen wie in Abbildung 2). Bei $t = 1.5 \cdot 10^{-3}$ Jahren stirbt die Wasserstoffschalenquelle ab, bei $t = 1.9$ Jahren hat die innere Konvektionszone in der Massenskala den kleinsten Abstand von der wasserstoffreichen Hülle.

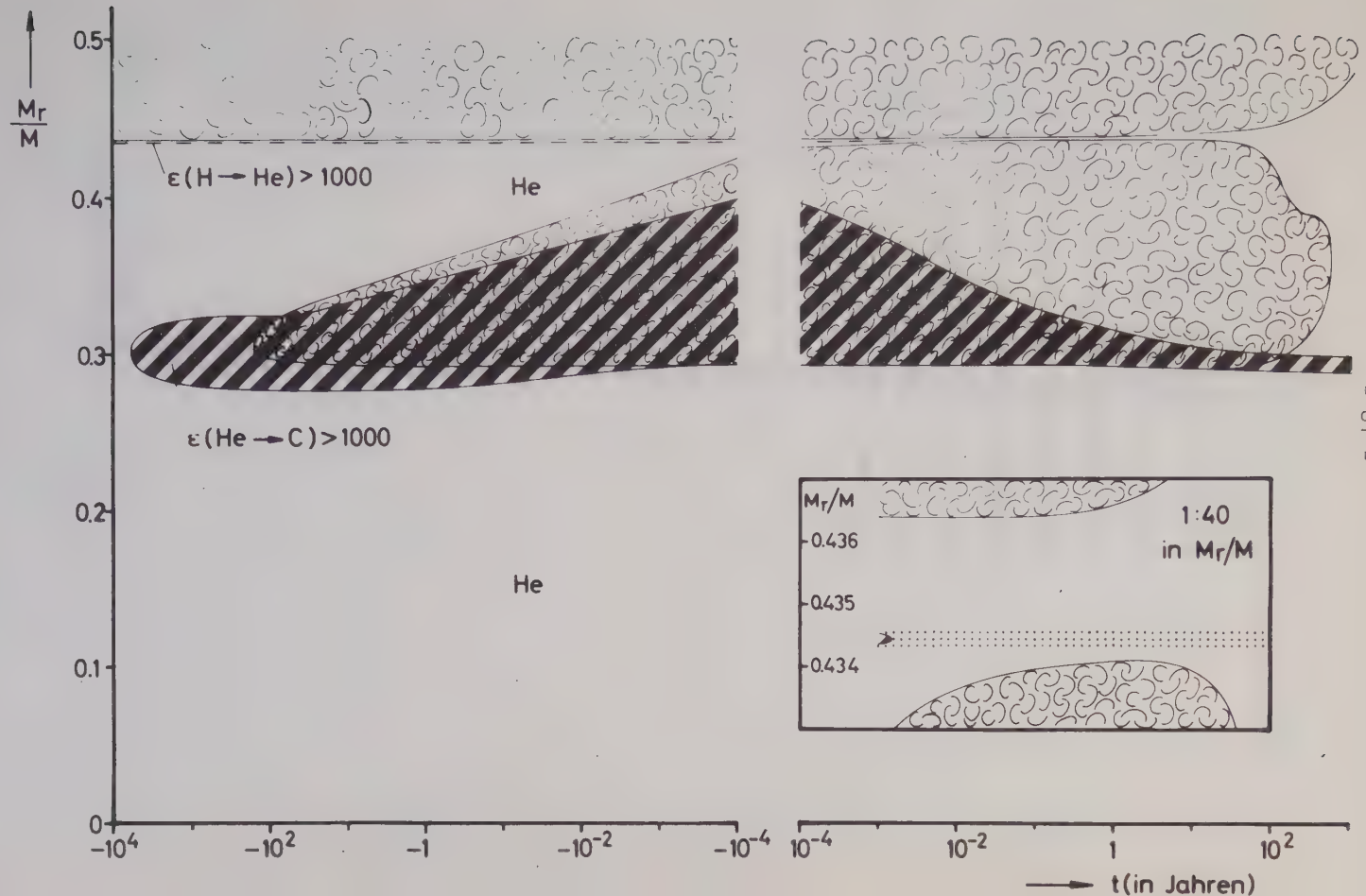

Mr/M
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ε(H → He) > 1000
He
ε(He → C) > 1000
He
Mr/M
0.436
0.435
0.434
1:40
in Mr/M
−10^4
−10^2
−1
−10^-2
−10^-4
10^-4
10^-2
1
10^2
t(in Jahren)

Abbildung 10: Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: die Zeichnung beginnt mit Modell 1035 und überlappt sich deshalb teilweise mit Abbildung 9. Die Massenskala ist die gleiche wie in den Abbildungen 2 und 9, die Zeitskala ist linear geteilt und auf Modell 1035 als Nullpunkt bezogen. Für die schraffierten Gebiete gilt die Bedingung $\varepsilon_{He} > 10^3$ erg g^{-1} sec^{-1}. Die Zeichnung endet bei Modell 1960.

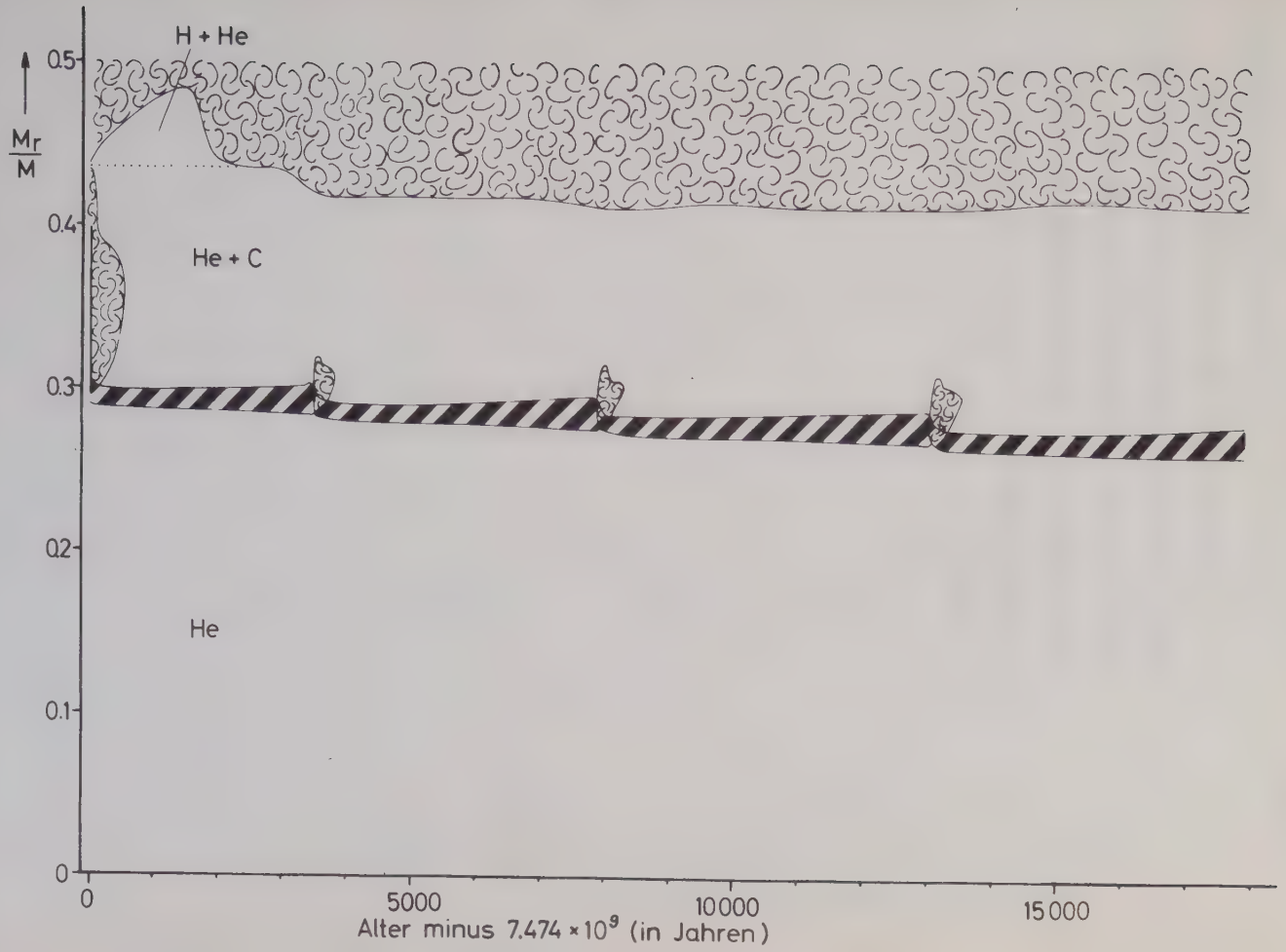

H + He
He + C
He
Mr/M
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5000
10000
15000
Alter minus 7.474 × 10⁹ (in Jahren)

Abbildung 11: Zeitliche Änderung der Leuchtkraft des Sterns nach dem Flash: die Zeitskala ist die gleiche wie in Abbildung 10 (Nullpunkt bei Modell 1035), die Leuchtkraftskala hat den gleichen Maßstab wie in Abbildung 1 (Hertzsprung-Russell-Diagramm). Im Hertzsprung-Russell-Diagramm liegen alle diese Modelle dicht an der Linie für vollkonvektive Modelle.

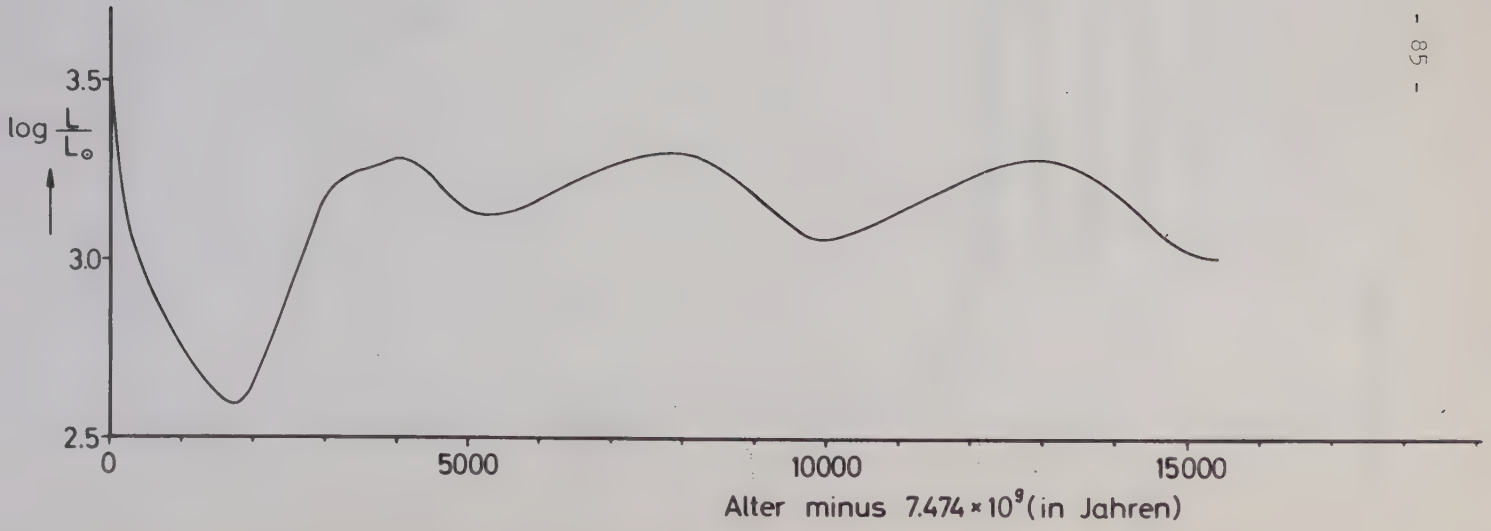
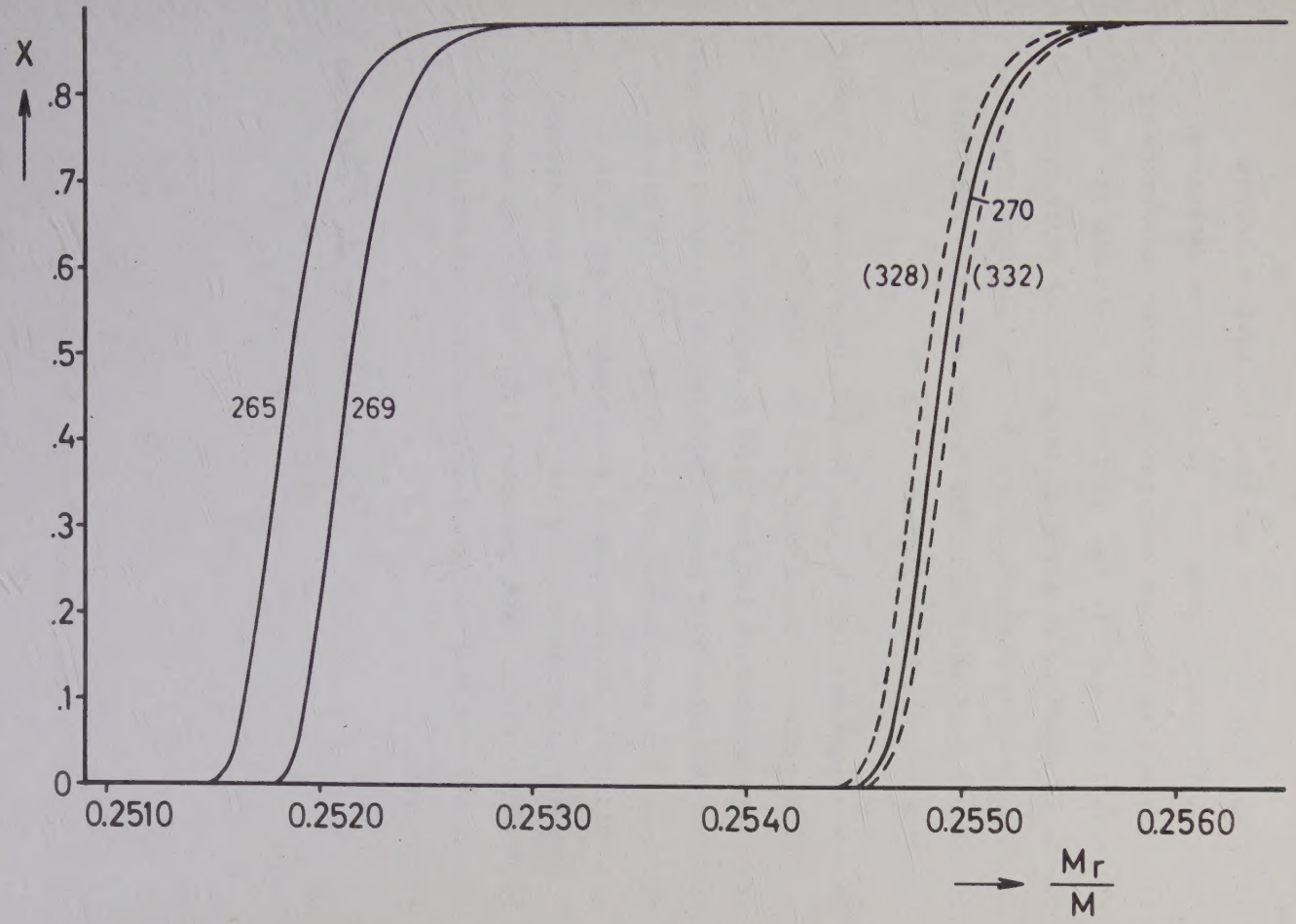

3.5
log L/L⊙
3.0
2.5
0
5000
10000
15000
Alter minus 7.474 × 10⁹ (in Jahren)

Abbildung 12: Die Wasserstoffhäufigkeit X in Abhängigkeit von M_r/M für die Modelle 265, 269 und 270. Der Verlauf von X in Modell 270 entstand durch paralleles Verschieben des X-Profils von Modell 269 über die Massenskala. Gestrichelt gezeichnet sind die Ergebnisse einer Wiederholungsrechnung mit 61 kleinen Zeitschritten anstelle des einen großen Zeitschrittes (Modelle 328 und 332).


X
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
0
265
269
270
(328)
(332)
0.2510
0.2520
0.2530
0.2540
0.2550
0.2560
Mr
M

Lebenslauf

Am 7. Mai 1936 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Willy Thomas und seiner Ehefrau Margarete, geb. Börner, in Dresden geboren. Mit kurzer Unterbrechung im Jahre 1945 besuchte ich von 1942 bis 1950 die 31. Grundschule in Dresden, im Anschluß daran bis zur Reifeprüfung im Juli 1954 die Oberschule Dresden-Ost. Von September 1954 bis August 1955 war ich im VEB Transformatoren- und Röntgenwerk Dresden als Hilfslaborant tätig.

Im Herbstsemester 1955 begann ich mit dem Studium der Physik an der Technischen Hochschule Dresden. Nach knapp fünf Semestern unterbrach ich das Studium vorübergehend, um es im Sommersemester 1958 an der Technischen Hochschule München fortzusetzen. Dort legte ich im Februar 1959 die Diplom-Vorprüfung ab. Im Anschluß daran studierte ich an der Universität München und bestand im Juli 1963 die Diplom-Prüfung in Physik. Seit September 1963 bin ich wissenschaftlicher Angestellter im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik.

Hans-Christoph Thomas